

DOI:10.3969/j.issn.1672-2337.2020.01.001

基于协方差矩阵重构的互质阵列 DOA 估计

盘敏容¹, 蒋留兵^{2,3}, 车 倒^{2,3}, 姜 兴¹

(1. 桂林电子科技大学信息与通信学院, 广西桂林 541004;
2. 桂林电子科技大学广西无线宽带通信与信号处理重点实验室, 广西桂林 541004;
3. 桂林电子科技大学计算机与信息安全学院, 广西桂林 541004)

摘要: 针对利用拓展的虚拟阵列的最大连续均匀阵列进行波达方向估计未完全利用虚拟阵列全部信息的问题, 提出了一种基于虚拟阵列插值的矩阵重构 DOA 估计算法。该算法首先通过互质阵列导出的非均匀虚拟阵列, 引入虚拟阵列插值的思想来构造一个均匀的线性虚拟阵列; 然后提出一个凸优化问题, 重构等效接收信号的协方差矩阵; 最后优化协方差矩阵的相应矢量的首个元素, 利用重构的协方差矩阵进行 DOA 估计。该算法充分利用虚拟阵列中包含的信息, 与利用拓展的虚拟阵列的最大连续均匀阵列进行 DOA 估计相比, 提高了估计自由度和分辨率。

关键词: 互质阵列; 阵列插值; 矩阵重构; 自由度

中图分类号: TN911.7 文献标志码: A 文章编号: 1672-2337(2020)01-0001-06

DOA Estimation of Coprime Array Based on Covariance Matrix Reconstruction

PAN Minrong¹, JIANG Liubing^{2,3}, CHE Li^{2,3}, JIANG Xing¹

(1. School of Information and Communication, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;
2. Guangxi Key Laboratory of Wireless Broadband Communication and Signal Processing, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China; 3. School of Computer and Information Security, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: Aiming at the problem that the direction of arrival estimation does not fully utilize all the information of the virtual array by using the largest continuous uniform array of extended virtual arrays, a covariance matrix reconstruction DOA estimation algorithm based on virtual array interpolation is proposed. Firstly, the algorithm expands the coprime array to a non-uniform virtual array and introduces the idea of virtual array interpolation to construct a uniform linear virtual array. Then a convex optimization problem is proposed to reconstruct the covariance matrix of the equivalent received signal. Finally, the first element of the corresponding vector of the variance matrix is optimized and the reconstructed covariance matrix is used for DOA estimation. The proposed algorithm makes full use of the information contained in the virtual array, improves the degree-of-freedom (DOF) and resolution compared with the DOA estimation using the largest continuous uniform array of the expanded virtual array.

Key words: coprime array; array interpolation; matrix reconstruction; degree-of-freedom (DOF)

0 引言

在阵列信号处理中, 波达方向(Direction of Arrival, DOA)估计算法被广泛应用于雷达、声呐

和无线通信等领域, 基于均匀线阵(Uniform Linear Array, ULA)的 DOA 估计技术成熟且阵列结构简单, 是最常用的阵列 DOA 估计方法^[1-2]。近年来, 由于互质阵列在相同阵元数下较均匀阵列有更大的孔径, 由于其出色的性能引起了广泛

收稿日期: 2019-07-09; 修回日期: 2019-09-18

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61561010); 广西自然科学基金(No. 2017GXNSFAA198089); 广西重点研发计划项目(No.桂科AB18126003, AB16380316); 桂林电子科技大学研究生教育创新计划项目(No. 2019YCXS016)

的关注^[3]。然而,由于互质阵列的非均匀性,该阵列相应的 DOA 估计算法较均匀线阵更难实现,故互质阵列 DOA 估计算法具有一定研究意义。将互质阵列通过某种方式拓展成虚拟阵列,虚拟阵列阵元数比实际的阵元数多,在一定程度上可以增加自由度(Degrees-of-Freedom,DOF)。由互质阵拓展得到的虚拟阵列由于缺失阵元而不是线性均匀阵列,运用传统的 DOA 估计算法无法得出准确的波达方向。为了解决这个问题,利用虚拟阵列的最大连续阵元的信息进行空域平滑的 DOA 估计,但该方法会损失不连续阵元的信息,影响 DOA 估计的自由度和分辨率^[4]。文献[5]通过将组成互质阵中的较小均匀线阵的个数加倍,用虚拟阵列的最大连续阵元的信息进行空域平滑的 DOA 估计提高了自由度和分辨率,但实际阵元数的增加会占用更多的空间资源。本文提出的算法在保持实际阵元数不变的情况下,通过阵列内插的方式将虚拟阵列缺失的阵元补齐从而达到线性均匀的虚拟阵列,重构协方差矩阵并优化相关的元素进行 DOA 估计,提高了自由度和分辨率。

1 信号模型

图 1 给出了互质阵的阵列结构。该阵列由图 1(a)中的两个稀疏均匀线阵(ULA)嵌套构成,记为子阵 1 和子阵 2,互质阵中子阵 1 和子阵 2 的第一个阵元相互重合。子阵 1 有 M 个阵元,阵元间距为 Nd ,子阵 2 有 N 个阵元,阵元间距为 Md , M 和 N 为互质的整数, $d=\lambda/2$, λ 一般为半波长。由于 M 和 N 的互质性,除了第一个阵元,该互质阵列其他阵元不会相互叠加,阵元数为 $M+N-1$ 。

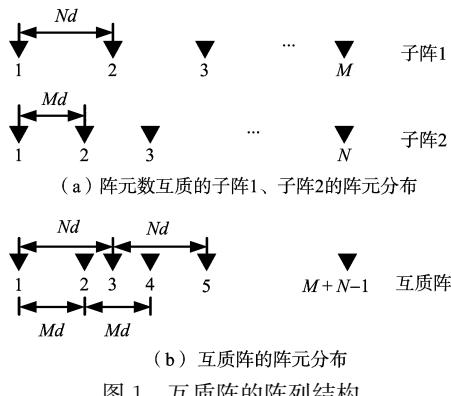


图 1 互质阵的阵列结构

假设有 K 个远场非相干窄带信号从不同入射

角 $\theta=[\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K]$ 以功率 $P=(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2)$ 发射并被该互质阵列接收,互质阵列接收信号可以表示为

$$x(t)=\sum_{k=1}^K a(\theta_k) s_k(t)+n(t)=\mathbf{A}(\theta) \mathbf{s}(t)+n(t) \quad (1)$$

式中: $s(t)$ 为信源矢量; $\mathbf{A}(\theta)$ 为阵列流型矩阵,由图 1 中互质阵列可知 $\mathbf{A}(\theta)=[a(\theta_1), a(\theta_2), \dots, a(\theta_K)]$, 其中 $a(\theta_k)=[1, e^{-j\pi d_2 d \sin(\theta_k)}, \dots, e^{-j\pi d_{M+N-1} d \sin(\theta_k)}]^T$ 为第 k 个信号源的方向向量, $[\cdot]^T$ 表示矩阵转置运算,互质阵列中第 i 个阵元的位置位于 $l_i d$ ($i=1, 2, \dots, M+N-1$); $n(t)$ 为加性高斯白噪声 $E[n(t)n^H(t)]=\sigma_n^2 I$, $[\cdot]^H$ 表示 Hermitian 转置运算。

计算互质阵列接收信号 $x(t)$ 的协方差矩阵如式(2):

$$\begin{aligned} R_x=E(x(t)x^H(t))= \\ \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 a(\theta_k) a^H(\theta_k)+\sigma_n^2 I \end{aligned} \quad (2)$$

由于 R_x 在实际应用中无法直接获得,在经典 DOA 估计中,其值通常由样本协方差矩阵代替为^[6]

$$\hat{R}_x=\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t) x^H(t) \quad (3)$$

式中, T 表示快拍数。

2 互质阵列 DOA 估计

目前利用互质阵列进行 DOA 估计的方法主要有两种^[7],一是利用互质阵的子阵列进行 DOA 估计,联合两个子阵列的估计结果进行角度的解模糊,但该方法对信源分辨的个数小于子阵列的个数;二是对互质阵列接收信号的协方差矩阵矢量化后构造虚拟阵元,然后利用该虚拟阵列进行 DOA 估计。为了充分利用互质阵列的信息,更大程度地提高其自由度,本文采用方法二进行分析。

2.1 互质阵列的虚拟阵元拓展方式

将互质阵列拓展成虚拟阵列是提高算法自由度的关键,虚拟阵元的位置与物理阵元的位置差相关,如图 2 所示。为了方便叙述,考虑含有 N 个整数的集合 $S=\{d_i, i=1, 2, \dots, N\}$, 将集合 S 上

的差分集定义为 $S_{\text{diff}} = \{d_i - d_j, 1 \leq i, j \leq N\}$ ^[8]。易知,该差分集是一个关于原点对称的集合,且有重复元素存在。为了充分利用互质阵列的稀疏特性,提取数据协方差矩阵中差集拓展的虚拟阵元信息并进行排列,通过协方差矩阵的向量化建立起互质阵列和虚拟阵列的统计关系:

$$\mathbf{v} = \text{vec}(\hat{\mathbf{R}}_x) = \mathbf{A}_v \sigma^2 + \sigma_n^2 i_v \quad (4)$$

式中, \mathbf{A}_v 为虚拟阵列的导向向量组成的矩阵, $\mathbf{A}_v = [a^*(\theta_1) \otimes a(\theta_1), a^*(\theta_2) \otimes a(\theta_2), \dots, a^*(\theta_K) \otimes a(\theta_K)]$, $\sigma^2 = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_K^2]^T$, $i_v = \text{vec}(I)$, $(\cdot)^*$ 表示共轭运算, $\text{vec}(\cdot)$ 表示矢量化运算, \otimes 表示克罗内克积运算。 $\hat{\mathbf{R}}_x$ 向量化后的矢量 \mathbf{v} 中的元素代表每一个虚拟阵元的相关信息,其中包括重复元素,对应差分集中重复的元素,即重复的阵元。假设虚拟阵元位于 $L_d = \{l_i, i=1, 2, \dots, M+N-1\}$, d, L_{diff} 为实际阵元的位置集合的差分集,即 $L_{\text{diff}} = \{l_i - l_j | i, j=1, 2, \dots, M+N-1\}$ 。故矢量 \mathbf{v} 中的元素对应差分集 L_{diff} ,但此差分集重复的虚拟阵元存在,因此取重复阵元位置元素的均值。重复阵元位置取均值后的集合为

$$L_{\text{diff}} = \{\pm(Mn - Nm) | n=0, 1, \dots, N-1, m=0, 1, \dots, M-1\} \quad (5)$$

该差分集对应的矢量

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{C}_1 \sigma^2 + \sigma_n^2 i_1 \quad (6)$$

式中, \mathbf{C}_1 为位于 L_{diff}, d 的互质虚拟阵列的导向矢量构成的矩阵, i_1 表示 i_v 中取出重复阵元后的阵列对应的元素。

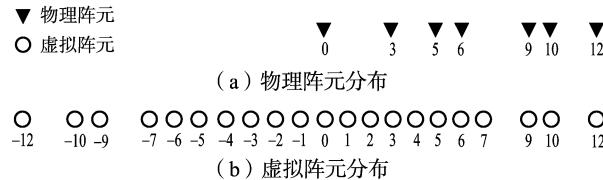


图 2 互质阵列以及拓展的虚拟阵列

现以子阵 1 阵元数 $M=3$, 子阵 2 阵元数 $N=5$ 为例, 对互质阵列的虚拟阵元拓展以及虚拟阵列的 DOA 估计进行分析, 则实际阵元的位置为 $\{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$ 。由此集合得到具有重复元素的差分集 L_1 为 $\{0, -3, -5, -6, -9, -10, -12, 3, 0, -2, -3, \dots, 1, 0, -2, 12, 9, 7, 6, 3, 2, 0\}$, 重复阵元位置的元素取均值并进行重排处理得到差分集 L_2 为 $\{-12, -10, -9, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12\}$, 如图 2(b)

所示。虽然图 2(b)中的阵列相对于互质阵列阵元数增加,但在位置 $\{-11, -8, 8, 11\}$ 处存在虚拟阵元的缺失,导致该虚拟阵列是一个非均匀阵列。

2.2 最大连续虚拟阵列空域平滑 DOA 估计

为了解决虚拟阵列的不均匀性带来的问题,一般的方法为先将该不均匀阵列中最大的连续虚拟阵列取出,然后在最大连续虚拟阵列进行空域平滑,最后进行 DOA 估计。如图 3 所示为阵元数 $M=3, N=5$ 时的最大连续虚拟阵列,在矢量 \mathbf{v} 中取出最大连续虚拟阵列,令其对应差分集为 L_3 , 差分集 L_3 中的元素连续, 对应矢量 $\mathbf{v}_2 = \mathbf{C}_2 \sigma^2 + \sigma_n^2 i_2$, \mathbf{C}_2 为最大连续虚拟阵列的导向矢量构成的矩阵, i_2 表示 i_v 中最大连续虚拟阵列对应的元素。由于 \mathbf{v}_2 是矢量, 其秩为 1, 无法分辨多个信号源, 故需要进行空域平滑^[5]。

如图 3 所示, 将该阵列分解成 $L = (|L_3|+1)/2$ 个相互重叠的均匀子线阵, $|\cdot|$ 表示集合的基数, 每一个均匀子线阵包含 L 个连续虚拟阵元, $v_{2,p}, l=1, 2, \dots, L$ 分别为 L 个子阵的矢量信息。进行空域平滑得到矩阵:

$$\mathbf{R}_v^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L v_{2,l} v_{2,l}^H, \quad (7)$$

最后利用子空间类算法对矩阵 \mathbf{R}_v 进行特征分解, 张成对应的子空间, 从而实现 DOA 估计。

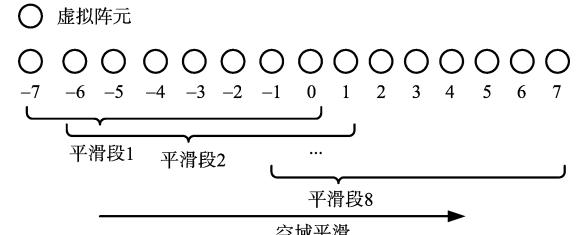


图 3 最大连续虚拟阵元的空域平滑

2.3 基于虚拟阵列内插的协方差矩阵重构 DOA 估计

利用最大连续虚拟阵元的矢量信息进行 DOA 估计的方法会造成部分接收信号信息的丢失, 从而影响后续 DOA 估计的精度并降低自由度。为了充分利用虚拟阵元的信息, 我们引入了阵列内插的思想来构造一个包含 L_1 中所有虚拟阵元的均匀阵列, 形成如图 4 所示的虚拟阵列 L_4 。建立 L_4 的向量化协方差矩阵 \mathbf{v}_3 和 L_1 向量化协方差矩

阵 v_1 之间的关系, 原虚拟阵元的等效信号不变, 插入阵元接收到的信号为 0^[9]:

$$[v_3]_i = \begin{cases} [v_1]_i, & i \in L_1 \\ 0, & i \in L_4 - L_1 \end{cases} \quad (8)$$

同理, v_3 是一个秩为 1 的向量, 无法直接分辨多个信号源, 需要通过图 4 空域平滑来解决。由于 v_3 关于原点对称, 利用式(9)简化初始的协方差矩阵, 该矩阵包含了线性虚拟阵元中的全部信息, 故省略空间平滑过程, 即

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{T}(v_{3+}) \quad (9)$$

式中, $\mathbf{T}(v_{3+})$ 表示以向量 v_{3+} 为第一列的厄米特托普利兹矩阵, $v_{3+} = \langle v_3 \rangle_i$, $0 \leq i \leq L_1$, $L_1 = (|L_4| + 1)/2$, \mathbf{R}_2 是一个满秩矩阵。矩阵重构的目的是要恢复内插虚拟阵列的协方差矩阵, 当矩阵含丢失元素时, 可以根据矩阵的低秩结构来恢复矩阵的所有信息^[11]。建立一个寻找低秩矩阵 \mathbf{T} 的优化问题, $\mathbf{T}(z)$ 为以向量 z 为第一列的厄米特托普利兹矩阵, 约束条件为该矩阵的平方与 \mathbf{R}_2^2 的差值的 Frobenius 范数最小^[10], 即

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \arg \min_{z \in \mathbb{C}^{L_1}} \text{rank}(\mathbf{T}(z)) \\ \text{s. t. } &\| [\mathbf{T}(z)]^2 - \mathbf{R}_2^2 \| \leq \epsilon, \mathbf{T}(z) \geq 0 \end{aligned} \quad (10)$$

式中, ϵ 为协方差矩阵拟合误差, $\text{rank}(\cdot)$ 为矩阵的秩。

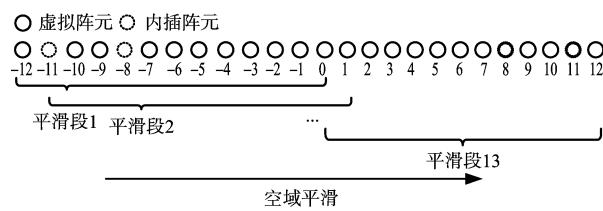


图 4 内插虚拟阵列空域平滑

为简化式(10)中的优化问题, 定义与矩阵 \mathbf{R}_2 相同维度的投影矩阵 \mathbf{P} , 矩阵 \mathbf{R}_2 与 \mathbf{P} 中的元素均与图 4 的内插均匀阵列的矢量元素对应, 但矩阵 \mathbf{P} 对应内插阵元的元素值为 0, 其余为 1。引入矩阵的迹, 将式(10)中的优化问题转化为凸优化问题^[10]:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \arg \min_{z \in \mathbb{C}^{L_1}} \frac{1}{2} \| \mathbf{P} \circ \mathbf{T}(z) - \mathbf{R}_2 \|_F^2 + \tau \text{Tr}(\mathbf{T}(z)) \\ \text{s. t. } &\mathbf{T}(z) \geq 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式中, τ 为正则化参数, $\| \cdot \|_F$ 表示计算 Frobenius 范数。在计算以向量 z 为第一列的厄米特托普利兹矩阵时, 由于 z 是由复数元素组成的向量, 该向量的第一个元素无法进行共轭拓展,

故先将向量 z 的第一个元素定义为实数, 并且在完成向量 z 的整体优化后再单独优化向量 z 的第一个元素。最后利用子空间类算法对优化重构后的矩阵 $\mathbf{T}(z)$ 进行特征分解, 张成对应的子空间, 进行谱峰搜索, 得到波达方向。

2.4 算法步骤总结

根据上述分析过程, 将基于虚拟阵列内插的协方差矩阵重构 DOA 估计算法的主要步骤归纳如下:

步骤 1: 根据互质阵模型以及预设入射角, 求解接收信号的协方差矩阵, 如式(3)并对协方差矩阵进行向量化处理, 如式(4), 初步构造虚拟阵列模型, 如式(6);

步骤 2: 对不连续的虚拟阵列进行内插, 在构造的均匀虚拟阵列的基础上初始化协方差矩阵, 如式(8)、式(9);

步骤 3: 利用初始化的协方差矩阵进行凸优化, 初步重构协方差矩阵, 如式(11), 然后优化矢量 z 的第一个元素以完成矩阵 $\mathbf{T}(z)$ 的重构;

步骤 4: 对重构后的矩阵 $\mathbf{T}(z)$ 进行特征值分解, 依据信号子空间和噪声子空间的正交性, 进行谱峰搜索, 最终得到 DOA 估计结果。

3 实验和结果分析

为了验证算法的性能, 分别对最大连续虚拟阵列 (Maximum Continuous Virtual Array, MCVA) DOA 估计算法和协方差矩阵重构 (Covariance Matrix Reconstruction, CMR) DOA 估计算法进行仿真对比分析。基于上述阵列模型和算法进行了仿真分析, 其中两组互质的稀疏均匀阵列的阵元数分别为 $M=3, N=5$, 由这两组阵列组成的非均匀阵列的阵元数为 $M+N-1=7$, 分别位于 $\{0, 3d, 5d, 6d, 9d, 10d, 12d\}, d=\lambda/2$ 。正则化参数 τ 的取值为 2.2×10^{-5} , 步骤 3 对矢量 z 第一个元素最后的优化值为 6.0。

实验 1 不同信源数时算法的检测性能仿真实验

为了验证两种算法的检测能力, 设置仿真条件: 信噪比 $\text{SNR}=5 \text{ dB}$, 快拍数 $K=1000$, 来波分布在 $-50^\circ \sim 50^\circ$ 之间, 对信源数为 $K=7$ 和 $K=9$ 作了仿

真。图5给出在多目标情况下利用MCVA算法和CMR算法计算出的空间谱,竖线为所设置的信号源入射角。当 $M=3, n=5$ 时,是式(7)中MCVA算法空域平滑计算出的矩阵 \mathbf{R}_s 的最大秩为8,故该算法

最多能分辨7个不同方向的信号源。由图5可知,MCVA算法和CMR算法均能分辨7个不同方向信号源,且CMR算法可分辨9个不同方向信号源,故CMR算法具有更大的自由度。

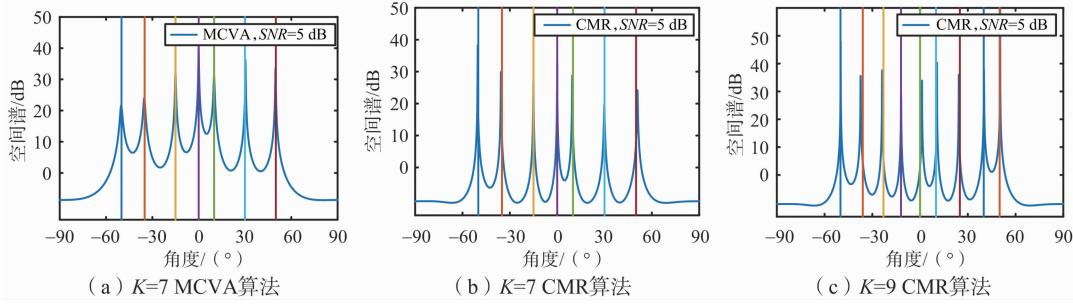


图5 不同信源数K下MCVA算法和CMR算法的空间谱

实验2 算法的分辨率性能仿真实验

分辨率表征了算法对相邻信号源的谱峰的分辨能力。设置仿真条件:信噪比 $SNR=5$ dB,快拍数 $K=1000$,研究两种算法在相邻信号源方向分别为 $\theta_1=-3^\circ, \theta_2=3^\circ, \theta_1=-2^\circ, \theta_2=2^\circ, \theta_1=-1.5^\circ, \theta_2=1.5^\circ$ 的情况下分辨率情况,实验结果

如图6所示,竖线表示信号源入射方向。由图6可知,MCVA算法在 $\theta_1=-2^\circ, \theta_2=2^\circ$ 时无法分辨两个目标,在 $\theta_1=-3^\circ, \theta_2=3^\circ$ 可分辨两个目标,而CMR算法在 $\theta_1=-1.5^\circ, \theta_2=1.5^\circ$ 和 $\theta_1=-2^\circ, \theta_2=2^\circ$ 均能分辨两个目标,故CMR算法的分辨率较高。

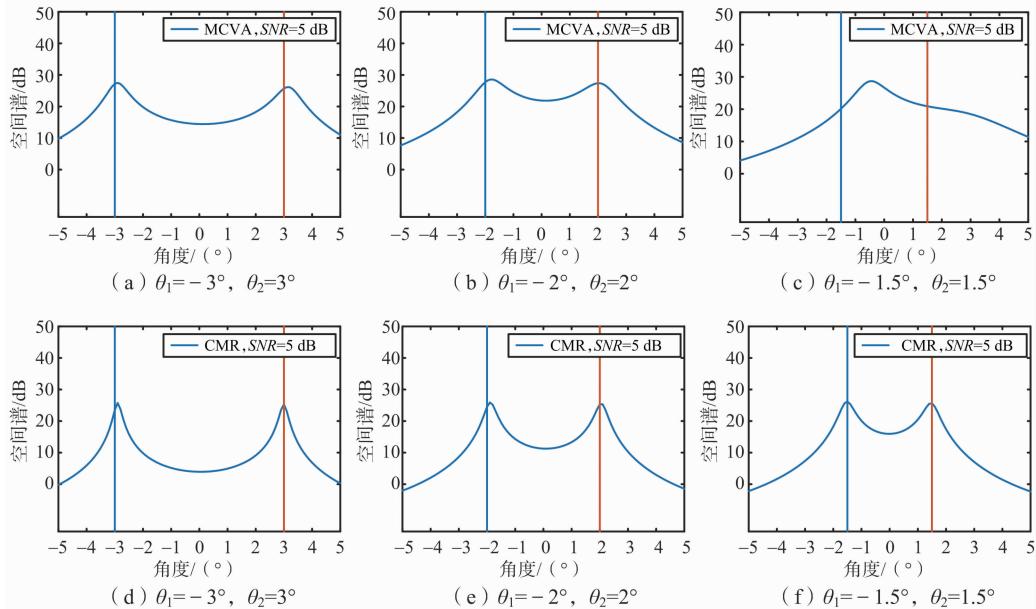


图6 算法在相邻目标 θ_1, θ_2 下的空间谱

实验3 算法的估计精度仿真实验

为了衡量算法的检测精度,定义均方根误差(Root Mean Square Error, RMSE)的数学表达式如式(12):

$$RMSE = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \sqrt{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\hat{\theta}_{k,p} - \theta_k)^2} \quad (12)$$

式中, $\hat{\theta}_{k,p}$ 为在第 p 次Monte-Carlo试验中第 k 个

信号源 θ_k 所估计出的波达方向, P 为Monte-Carlo试验次数, K 为总信号源个数。如图7(a)所示信源方向为 $\theta_1=-30^\circ, \theta_2=30^\circ$,快拍数为1000时,MCVA算法和CMR算法在不同信噪比下的均方根误差的实验结果,其中Monte-Carlo试验次数为 $P=30$ 。如图7(b)所示为信源方向为 $\theta_1=-30^\circ, \theta_2=30^\circ, SNR=5$ dB时,MCVA算法和CMR算法在不同快拍数下的均方根误差的实验结果,其

中 Monte-Carlo 试验次数为 $P = 30$ 。由图可知, CMR 算法的性能优于 MCVA 算法。

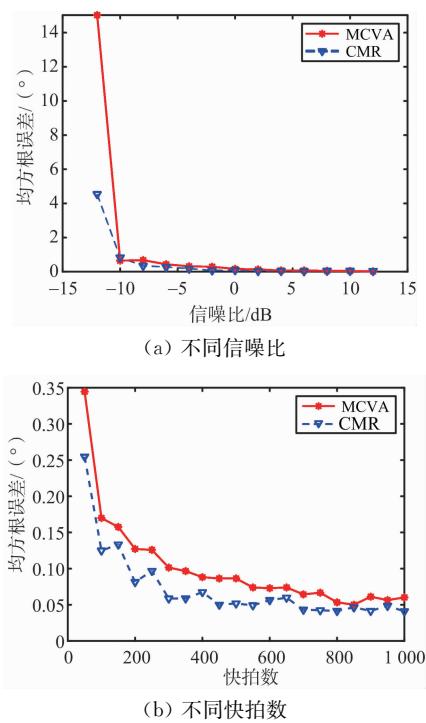


图 7 算法在信源数 $K=2$ 下的均方根误差

如图 8(a)所示为信源数 $K=7$, 方向为 $\theta=[-50^\circ, -35^\circ, -15^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 30^\circ, 50^\circ]$, 信噪比 $\text{SNR}=5 \text{ dB}$, Monte-Carlo 试验次数为 $P=30$ 下 MCVA 算法和 CMR 算法在不同快拍数下的 RMSE 的实验结果;如图 8(b)所示为信源数 $K=9$, 方向为 $\theta=$

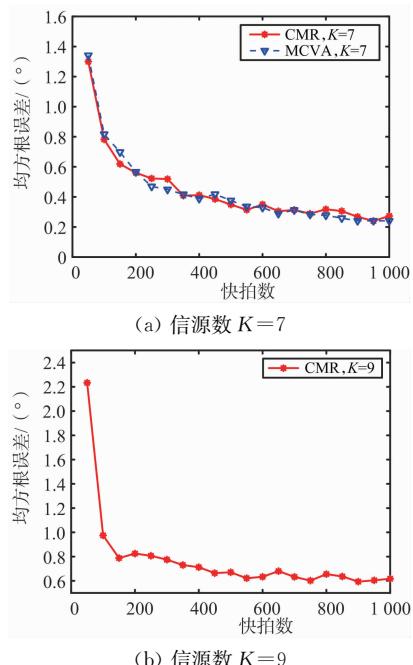


图 8 多信源数下算法在不同快拍数下的性能

$[-50^\circ, -36^\circ, -23^\circ, -12^\circ, 0^\circ, 10^\circ, 25^\circ, 40^\circ, 50^\circ]$, 信噪比 $\text{SNR}=5 \text{ dB}$, Monte-Carlo 试验次数为 $P=30$ 下 CMR 算法在不同快拍数下的 RMSE 的实验结果。由图可知,随着快拍数的增加, RMSE 随之减小,最后趋于平稳,说明算法鲁棒性较好。

4 结束语

本文提出了一种基于虚拟阵列插值的矩阵重构 DOA 估计算法,该算法通过阵列插值的方式将互质阵列的虚拟阵列拓展成虚拟均匀线阵,利用均匀虚拟线阵等效信息初始化协方差矩阵,最后通过并优化协方差矩阵的相应矢量的首个元素,利用重构的低秩协方差矩阵进行 DOA 估计,充分利用了互质阵列拓展的虚拟阵列的信息。将本文算法与最大连续虚拟阵元的空间平滑协方差矩阵 DOA 估计算法进行对比,在不同信源数时算法的检测空间谱、分辨率性能和不同信源数下的均方根误差进行了仿真实验,结果表明,该算法可实现更大的自由度和更高的分辨率,并呈现出较好的鲁棒性。

参考文献:

- [1] 张小飞, 汪飞, 徐大专. 阵列信号处理的理论和应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 1-20.
- [2] SHI J, HU G, ZHANG X, et al. Generalized Co-Prime MIMO Radar for DOA Estimation with Enhanced Degrees of Freedom[J]. IEEE Sensors Journal, 2018, 18(3): 1203-1212.
- [3] VAIDYANATHAN P P, PAL P. Sparse Sensing with Co-Prime Samplers and Arrays[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2011, 59(2): 573-586.
- [4] PIYA P. Correlation Awareness in Low-Rank Models: Sampling, Algorithms, and Fundamental Limits [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2018, 35(4): 56-71.
- [5] SHI Z, ZHOU C, GU Y, et al. Source Estimation Using Coprime Array: A Sparse Reconstruction Perspective[J]. IEEE Sensors Journal, 2017, 17(3): 755-765.
- [6] ZHOU Chengwei, SHI Zhiguo, GU Yujie, et al. Doa Estimation by Covariance Matrix Sparse Reconstruction of Coprime Array[C] // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Brisbane, QLD, Australia : IEEE, 2015.

(下转第 13 页)