

# 基于框架理论的最小阵元数稀疏阵综合算法研究

陶海红, 郭晶晶

(西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室, 陕西西安 710071)

**摘要:** 随着越来越高的角度分辨率要求与进一步降低的天线成本, 大规模阵列越来越普及。在重量、体积和成本有限时, 要获得大孔径天线得到较高的角度分辨率, 且尽量减少天线阵元数目, 可采用最小阵元稀疏阵设计方法。本文基于框架理论, 提出了一种新的最小阵元数的稀疏阵综合方法。该方法将稀疏阵设计问题转化为压缩感知问题模型, 然后利用次优反馈的零空间追踪硬阈值算法求解。该方法可同时综合阵元位置与阵元权重来匹配给定的阵列方向图, 并可有效降低阵元数。仿真实验证明了算法的正确性和有效性。

**关键词:** 稀疏阵综合; 框架理论; 次优反馈的零空间追踪硬阈值算法; 压缩感知

**中图分类号:** TN957.2   **文献标志码:** A   **文章编号:** 1672-2337(2021)05-0491-08

## Pattern Synthesis of Sparse Array with Minimum Array Element Number Based on Framework Theory

TAO Haihong, GUO Jingjing

(National Laboratory of Radar Signal Processing, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** With higher angle resolution requirements and reduced antenna costs, large-scale array becomes more and more popular. When the weight, volume and cost are limited, the design method of the minimum array sparse array can be used to obtain the high angle resolution of the large aperture antenna and minimize the number of antenna arrays. Based on the framework theory, this paper puts forward a new method of sparse array synthesis with the minimum number of array elements. The solution transforms the sparse array design problem into a compression sensing problem model, and then solves it by using the sub-optimal feedback of the zero space tracking hard threshold algorithm. The solution can optimize the array element positions and weights to match the given array pattern, and can effectively reduce the number of array elements. The simulation experiment proves the correctness and validity of the proposed algorithm.

**Key words:** sparse array synthesis; framework theory; sub-optimal feedback of the zero space tracking hard threshold algorithm; compression sensing

## 0 引言

天线阵列综合问题包括阵型优化和综合权值优化。在天线重量、体积和成本有限时如卫星平台、导航、飞机等, 要获得大孔径天线, 最小阵元设计是首要考虑的方法<sup>[1-7]</sup>。

文献[8]的贝叶斯压缩感知(BCS)<sup>[9-10]</sup>算法通过将对称阵列优化问题转换为稀疏约束优化框架, 并通过贝叶斯压缩感知(BCS)算法求解, 可以

有效地减少阵列中的天线元件数量。但文中假设阵元加权只有实部, 且阵元分布对称。针对这一问题, 文献[11]提出了基于多任务贝叶斯压缩感知算法(multi-task BCS)<sup>[12]</sup>的最小阵元稀疏阵综合方法, 适用于权值为复数, 阵列不对称的线阵最小阵元稀疏阵综合问题; 文献[13-15]将单任务贝叶斯压缩感知(ST-BCS)以及多任务贝叶斯压缩感知(MT-BCS)应用于最小阵元稀疏面阵、最小阵元稀疏共形阵以及最小阵元稀疏同心圆环阵中, 仿真结果都较为理想, 但超参数的选择对不同阵元

规模的方向图综合问题影响不同,针对不同问题需要做多次实验得到一组适用的超参数,不具有普遍适用性。且在处理面阵问题时,阵元稀疏率只能达到 0.64。而本文采用的算法,同一组参数可用于任意规模的线阵与面阵。

本文采用框架理论,将备选阵元位置稀疏化,利用权值的模值大小表示该位置阵元的选择与否,通过次优反馈的零空间追踪硬阈值算法<sup>[16]</sup>得到满足近似条件的最小  $l_0$  范数权值解,即得到最小阵元的稀疏阵以及该位置阵元的加权值。线阵与平面阵的仿真结果说明了算法的有效性。

## 1 阵型的稀疏框架建模

### 1.1 线阵的稀疏框架问题建模

不失一般性,假设目标为远场窄带信号,模型示意图如图 1 所示。

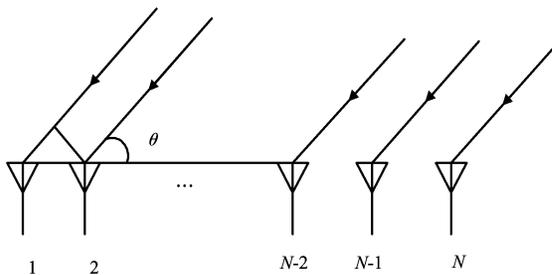


图 1 线阵示意图

若来波方向  $\theta$  如图 1 所示,对于  $N$  个阵元的任意线阵,阵列导向矢量可表示为

$$a(\theta) = [a_1, a_2, a_3, \dots, a_N]^T \quad (1)$$

$$a_i = \exp(j2\pi d_i \sin\theta / \lambda), i = 1, 2, \dots, N$$

式中,  $\lambda$  为波长,  $d_i$  为第  $i$  个阵元与参考点之间的距离。

当期望来波方向为  $\theta_p$  时,阵列方向图  $P(\theta)$  可表示为

$$P(\theta) = a(\theta_p)^H * a(\theta) \quad (2)$$

为实现低副瓣要求,一般会在阵元后加权值  $W$ ,则加权后阵列方向图  $P(\theta)$  可表示为

$$P(\theta) = (a(\theta_p) \odot W)^H * a(\theta) = w^H * a(\theta) \quad (3)$$

$$w \triangleq a(\theta_p) \odot W$$

式中,  $\odot$  表示矩阵点乘。

为综合期望方向图,首先通过稀疏化得到备选阵元位置,即  $\tilde{N}$  个间距远远小于  $\lambda/2$  稀疏点,假设这些稀疏点上全部放置各向同性阵元,则其方

向图可表示为

$$\tilde{P}(\theta) = \tilde{w}^H * \tilde{a}(\theta) = \sum_{i=1} \tilde{w}_i * e^{j2\pi/\lambda * d_i * \sin\theta} \quad (4)$$

当  $|\tilde{w}_i|$  为 0 时表示第  $i$  个备选阵元未被选择,当  $|\tilde{w}_i|$  不为零时考虑第  $i$  个备选阵元被选择。通过计算  $\tilde{w}$  即可同时实现最小阵元稀疏阵的阵元位置优化以及权值综合。

最小化阵元稀疏阵综合问题即可简化为

$$\min \|\tilde{w}\|_0 \quad (5)$$

$$\text{s. t. } P_{ref} = \tilde{A} * \tilde{w}^H$$

### 1.2 平面阵的稀疏框架问题建模

阵列放置于  $yOz$  平面,参考位置为原点,方位角  $\varphi$  和俯仰角  $\theta$  的定义如图 2 所示。

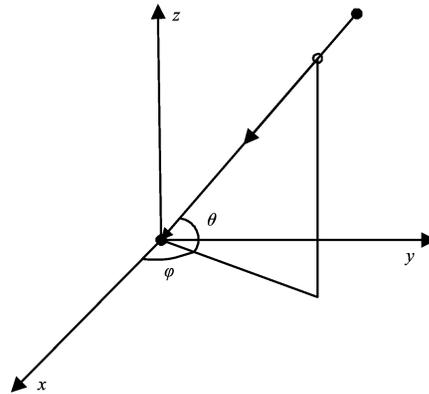


图 2 面阵示意图

与线阵类似,  $N$  阵元平面阵的普通波束形成方向图可表示为

$$P(\theta, \varphi) = (a(\theta_p, \varphi_p) \odot W)^H * a(\theta, \varphi) \quad (6)$$

式中,

$$a(\theta, \varphi) = e^{j2\pi/\lambda * pos * u(\theta, \varphi)}$$

$$u(\theta, \varphi) = [\sin\theta * \cos\varphi, \sin\theta * \sin\varphi, \cos\theta]^T$$

$$pos = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & y_N & z_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中  $\theta_p, \varphi_p$  分别为目标俯仰角与方位角,  $W$  为阵列加权值,  $pos$  为  $N$  个阵元在笛卡尔坐标系下的三维坐标矩阵。

假设方位角与俯仰角都取  $M$  个值,即  $P$  是  $M * M$  的复矩阵。

将  $P$  按行展开,改写为  $\tilde{P}$ ,则  $P$  与  $\tilde{P}$  之间的转化关系如下:

$$\begin{aligned} \bar{P}(m) &= P(\lfloor (m-1)/M \rfloor + 1, \\ &\quad \text{mod}(m-1, M) + 1), m=1, 2, \dots, M * M \\ P(i, j) &= \bar{P}(i * M + j), i, j=1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (8)$$

与线阵类似,为综合期望方向图,首先通过稀疏化得到备选阵元位置,即  $\tilde{N}$  个间距远远小于半波长稀疏点,假设这些稀疏点上全部放置各向同性阵元,则其方向图可表示为

$$\bar{P} = \tilde{A} * \tilde{w} = \begin{bmatrix} \tilde{a}(\theta_1, \varphi_1)^H \\ \tilde{a}(\theta_1, \varphi_2)^H \\ \vdots \\ \tilde{a}(\theta_1, \varphi_M)^H \\ \vdots \\ \tilde{a}(\theta_M, \varphi_M)^H \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \vdots \\ \tilde{w}_N \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} &\text{最小化阵元稀疏面阵综合问题即可简化为} \\ &\min \|\tilde{w}\|_0 \\ &\text{s. t. } P\_ref = \tilde{A} * \tilde{w}^H \end{aligned} \quad (10)$$

### 1.3 问题模型简化

由于本文算法适用于实数问题,而阵列方向图优化一般为复数问题。只有当参考阵元位置对称时,阵列方向图只有实部,可直接使用第三部分的算法优化得到阵元位置与阵元加权值。其他情况下需将复数问题实数化。

$$\begin{aligned} P\_ref^* &\triangleq [\text{real}(P\_ref); \text{imag}(P\_ref)] \\ \tilde{A}^* &\triangleq [\text{real}(\tilde{A}), -\text{imag}(\tilde{A}); \text{imag}(\tilde{A}), \text{real}(\tilde{A})] \\ \tilde{w}^* &\triangleq [\text{real}(\tilde{w}); \text{imag}(\tilde{w})] \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $\text{real}(\cdot)$  表示取实部,  $\text{imag}(\cdot)$  表示取虚部。

$$\begin{aligned} &\text{实数化后,问题可重新表示为} \\ &\min \|\tilde{w}^*\|_0 \\ &\text{s. t. } P\_ref^* = \tilde{A}^* * (\tilde{w}^*)^H \end{aligned} \quad (12)$$

使用次优反馈的零空间追踪硬阈值算法得到  $\tilde{w}^*$  后,再转换为复权值。

$$\tilde{w} = \tilde{w}^*(1:\tilde{N}) + j * \tilde{w}^*(\tilde{N}+1:2 * \tilde{N}) \quad (13)$$

式中,  $\tilde{N}$  表示备选阵元位置数目。

## 2 次优反馈的零空间追踪硬阈值算法

针对问题

$$\begin{aligned} &\min \|\tilde{w}\|_0 \\ &\text{s. t. } P\_ref = \tilde{A} * \tilde{w}^H \end{aligned} \quad (14)$$

由于矩阵  $\mathbf{A}$  是列满秩,行稀疏的,可用针对非凸问题的带反馈的零空间追踪硬阈值算法来实现稀疏约束。

一个零空间追踪基本算法的框架为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} u^k &= \mathbb{D}(\tilde{w}^k) \\ \tilde{w}^{k+1} &= \tilde{w}^k + \mathbb{P}(u^k - \tilde{w}^k) \end{aligned} \quad (15)$$

式中,  $\mathbb{D}(\tilde{w}^k)$  表示以不同准则优化所期望的优化函数,  $\mathbb{P} := I - \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} \tilde{A}$ , 是  $\tilde{A}$  的正交投影矩阵。若  $\tilde{w}^0$  是可行解,则  $\tilde{w}^k$  也是可行解。

证明:

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{k+1} &= \tilde{w}^k + \mathbb{P}(u^k - \tilde{w}^k) = \\ &\tilde{w}^k + [I - \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} \tilde{A}](u^k - \tilde{w}^k) = \\ &\tilde{w}^k + (u^k - \tilde{w}^k) - \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} \tilde{A} (u^k - \tilde{w}^k) = \\ &u^k + \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} (P\_ref - \tilde{A} u^k) \\ &\tilde{A} (\tilde{w}^{k+1} - u^k) = \tilde{A} \tilde{A}^* (\tilde{A} \tilde{A}^*)^{-1} (P\_ref - \tilde{A} u^k) \\ &\tilde{A} \tilde{w}^{k+1} - \tilde{A} u^k = (P\_ref - \tilde{A} u^k) \\ &\tilde{A} \tilde{w}^{k+1} = P\_ref \end{aligned} \quad (16)$$

此时  $\tilde{w}^k$  为可行解但不是稀疏解,需要将  $\tilde{w}^k$  稀疏化,采用适用于非凸问题的硬阈值算法,求解目标为

$$\arg \min_{u^k} \|\tilde{w}^k - u^k\|_2^2 + \beta \|u^k\|_0 \quad (17)$$

式中,  $\tilde{w}^k$  为已知变量,  $u^k$  为稀疏未知变量,  $\beta$  为常数。

常规硬阈值算法的解为

$$u^k = \begin{cases} 0, & |\tilde{w}^k| < \sqrt{\beta} \\ \tilde{w}^k, & |\tilde{w}^k| > \sqrt{\beta} \end{cases} \quad (18)$$

常规硬阈值算法只是实现了稀疏化,并没有将  $\tilde{w}^k$  完全利用,加入反馈操作,将  $|\tilde{w}^k| < \sqrt{\beta}$  中的信息反馈到  $u^k$  的计算中。

由于  $\tilde{w}^k$  是稀疏的,可将其拆分为非稀疏项  $\tilde{w}_T^k$  (模值较大)与稀疏项  $\tilde{w}_{T^c}^k$  (模值较小),在每一次迭代中,将  $\tilde{w}_{T^c}^k$  中的能量挤压到  $\tilde{w}_T^k$  中,从而使随着迭代次数的增加  $\tilde{w}_{T^c}^k$  更趋向于 0。

假设存在  $\eta^k$  使得  $\tilde{A}_{T_k} \eta^k \approx \tilde{A}_{T_k^c} * \tilde{w}_{T_k^c}^k$ , 即

$$\eta^k = \arg \min_{\eta} \|\tilde{A}_{T_k} \eta - \tilde{A}_{T_k^c} \tilde{w}_{T_k^c}^k\|_2 \quad (19)$$

其最优解为

$$\eta^k = (\tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k})^{-1} \tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k^c} \tilde{w}_{T_k^c}^k \quad (20)$$

算法为

(NST+HT+FB)

$$\begin{cases} u_{T_k}^k = \tilde{w}_{T_k}^k + (\tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k})^{-1} \tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k} \tilde{w}_{T_k}^k \\ u_{T_k}^c = 0 \\ w^{k+1} = \tilde{w}^k + \mathbb{P}(u^k - \tilde{w}^k) \end{cases} \quad (21)$$

由于矩阵逆运算的复杂度较高,可将以上算法改进为

(NST+HT+subFB)

$$\begin{cases} u_{T_k}^k = \tilde{w}_{T_k}^k + \chi_k \tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k} \tilde{w}_{T_k}^k \\ u_{T_k}^c = 0 \\ w^{k+1} = \tilde{w}^k + \mathbb{P}(u^k - \tilde{w}^k) \end{cases} \quad (22)$$

其中  $\chi_k < 1/\|\tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k}\|_2$  文中取  $\chi_k = 0.85 * 1/\|\tilde{A}_{T_k}^* \tilde{A}_{T_k}\|_2$ 。

NST+HT+subFB 算法流程:

初始化:输入  $P_{ref}, \tilde{A}, \epsilon_1, \epsilon_2$

初始化参数:  $s=0; l=k=0; H_1=1; \epsilon_1=1e-3; \epsilon_2=1e-4; \tilde{w}^0=A^H(A * A^H)^{-1}P_{ref}$

循环 B 外循环:当  $H_1 > \epsilon_1$  成立,

令  $H_2=1, s=s+1;$

内循环:当  $H_2 > \epsilon_2$  成立,

利用公式(20),计算  $[w^{k+1}, u^k]$

$$H_2 = \|\tilde{w}^{k+1} - \tilde{w}^k\|_2 / \|\tilde{w}^k\|_2$$

$k=k+1$

内循环结束

$$\gamma^{l+1} = \|\tilde{A}u^k - P_{ref}\|_2 / \|P_{ref}\|_2$$

$$H_1 = |\gamma^{l+1} - \gamma^l|$$

$l=l+1$

外循环结束

将  $|w^{k+1}|$  降序排列,取前  $s$  个值及其所在位置,得到对应的阵元位置;

由于算法 NST+HT+subFB 需要在外循环中将稀疏阵元数  $s$  从 1 开始递增,适用于稀疏率较低的问题,即稀疏阵元数目较少。在处理稀疏阵元数目较多或参考阵元数目较多的问题时,计算复杂度高、耗时长且最终效果不太理想。

故针对备选阵元数目较多情况考虑改进算法,即改变稀疏阵元数  $s$  的递增初始值。首先迭代计算将  $\tilde{w}^{k+1}$  全部能量的  $0 < M_u < 1$  倍集中到  $\tilde{w}^{k+1}$  的前  $s$  个大值中,得到 NST+HT+subFB 算法中的稀疏阵元数初始值  $s$ ,之后的过程与算法 NST+HT+subFB 相同。具体算法流程如下。

NST+HT+subFB+cumS 算法流程:

初始化:输入  $P_{ref}, \tilde{A}, \epsilon_1, \epsilon_2, M_u$

初始化参数:  $s=1; l=k=0; H_1=1; H_2=1; \epsilon_1=1e-3; \epsilon_2=1e-4; M_u=0.5; \tilde{w}^0=A^H(A * A^H)^{-1}P_{ref}$

循环 A:当  $H_2 > \epsilon_2$  成立,

利用公式(20),计算  $[w^{k+1}, u^k]$

$$H_2 = \|\tilde{w}^{k+1} - \tilde{w}^k\|_2 / \|\tilde{w}^k\|_2$$

$$w\_cum = cumsum(sort(abs(\tilde{w}^{k+1}))) / sum(abs(\tilde{w}^{k+1}))$$

$K = w\_cum > M_u$  的第一个元素的位置

若  $K - s \geq s\_step$

$$s = s + s\_step$$

循环结束

循环 B 外循环:当  $H_1 > \epsilon_1$  成立,

令  $H_2=1, s=s+1;$

内循环:当  $H_2 > \epsilon_2$  成立,

利用公式(20),计算  $[w^{k+1}, u^k]$

$$H_2 = \|\tilde{w}^{k+1} - \tilde{w}^k\|_2 / \|\tilde{w}^k\|_2$$

$k=k+1$

内循环结束

$$\gamma^{l+1} = \|\tilde{A}u^k - P_{ref}\|_2 / \|P_{ref}\|_2$$

$$H_1 = |\gamma^{l+1} - \gamma^l|$$

$l=l+1$

外循环结束

将  $|w^{k+1}|$  降序排列,取前  $s$  个值及其所在位置,得到对应的阵元位置;

将 NST+HT+subFB 算法与 NST+HT+subFB+cumS 算法统一用流程图即图 3 表示。

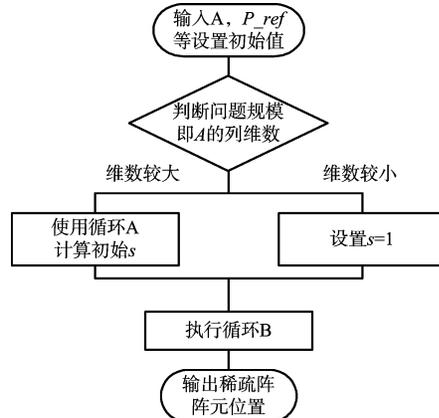


图 3 算法框图

### 3 仿真实验与性能分析

仿真 1 不同阵元规模的切比雪夫权值均匀线阵方向图稀疏阵综合

a) 40 阵元的切比雪夫权值均匀线阵方向图稀疏阵综合

参考方向图为40阵元切比雪夫权值均匀线阵方向图;备选阵元位置间隔均匀排列为 $[-25 * \lambda / 2 : \lambda / 10 : 25 * \lambda / 2]$ ,方向图角度 $\theta \in [-45, 45]$ (单位:rad),仿真结果如图4、图5所示,与参考算法的性能比较如表1所示。

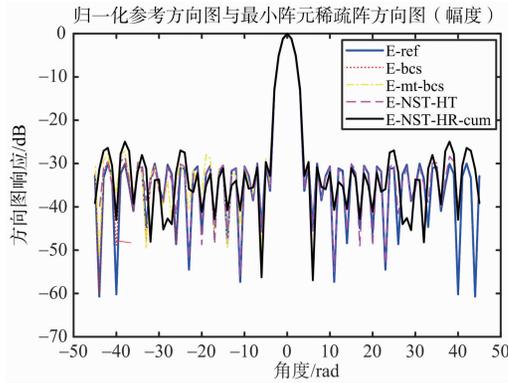


图4 仿真1 a)的方向图

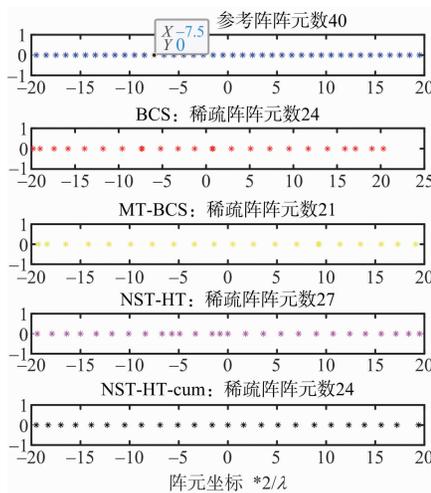


图5 仿真1 a)的阵元位置

表1 仿真1 a)的4种算法对比

参数	E-ref	E-bcs	E-mt-bcs	E-NST-HT	E-NST-HT-cum
$P$	40	24	21	27	24
$P/P-ref$	1	0.6	0.525	0.675	0.6
$t$		0.227 4	0.064 4	0.277 7	0.199 8
误差		0.010 1	0.002 4	0.216 8	0.174 0
增益/dB	14.272 1	14.266 2	11.049 3	11.547 2	11.923 6

针对参考方向图阵元数目较少情况,所提算法与基于稀疏贝叶斯学习的最小阵元位置优化算法相同,可优化得到符合要求的阵元位置。NST-HT-cum与NST-HT相比,由于首先计算了初始选取元素的数目,加快了算法的速度,误差更小。

b) 300阵元的切比雪夫权值均匀线阵方向图

稀疏阵综合

参考方向图为300阵元切比雪夫加权均匀线阵的方向图;备选阵元位置间隔均匀排列为 $[-150 * \lambda / 2 : \lambda / 10 : 150 * \lambda / 2]$ ,方向图角度 $\theta \in [-45, 45]$ (单位:rad),仿真结果如图6、图7所示,与参考算法的性能比较如表2所示。

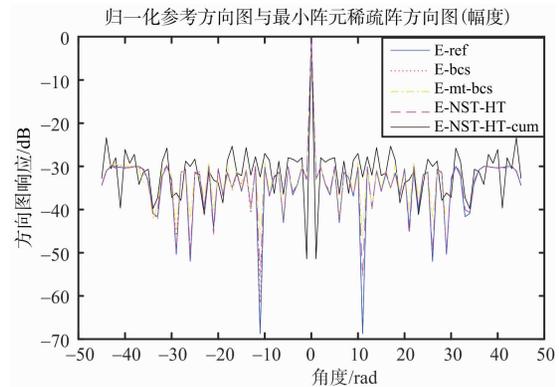


图6 仿真1b)的方向图

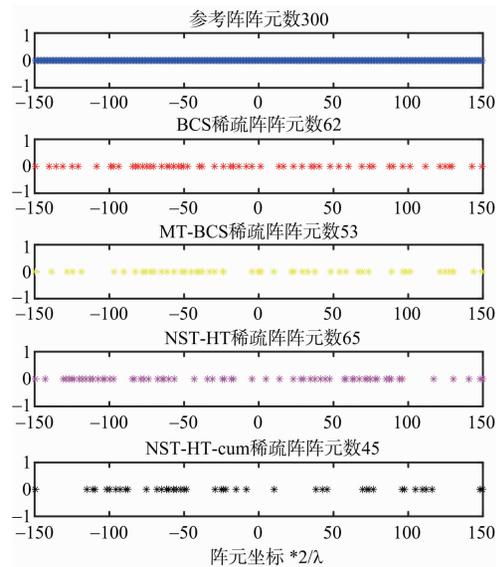


图7 仿真1b)的阵元位置

表2 仿真1b)的4种算法对比

参数	E-ref	E-bcs	E-mt-bcs	E-NST-HT	E-NST-HT-cum
$P$	300	62	53	65	45
$P/P-ref$	1	0.206 7	0.176 6	0.216 7	0.15
$t$		1.537 3	0.604 1	50.265 1	15.989 2
误差		0.015 7	0.001 9	0.546 9	0.534 5
增益/dB	17.885	17.869 4	13.176 7	12.042 36	12.206 7

对于参考方向图的阵元数目较大情况,仿真证明了所提算法也可以优化得到满足要求的方向图。与基于稀疏贝叶斯学习的最小阵元位置优化

算法相比,在阵元数目增多时,所提算法优势显现。

仿真 2 任意方向图的线阵稀疏阵综合

a) 平顶主瓣方向图的稀疏阵综合

参考方向图为给定的平顶主瓣方向图;备选阵元位置间隔均匀排列为 $[-25 * \lambda/2; \lambda/10; 25 * \lambda/2]$ ,方向图角度 $\theta \in [-90, 90]$ (单位:rad),仿真结果如图 8、图 9 所示,与参考算法的性能比较如表 3 所示。

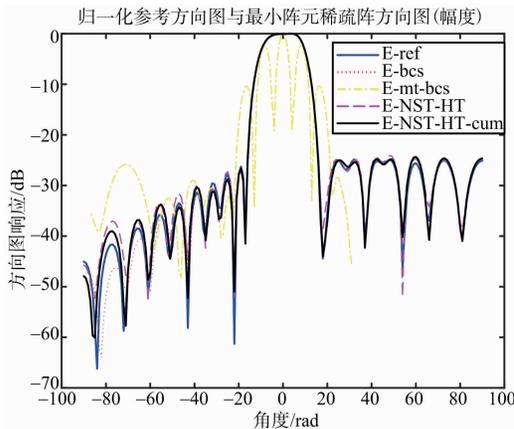


图 8 仿真 2a) 的方向图

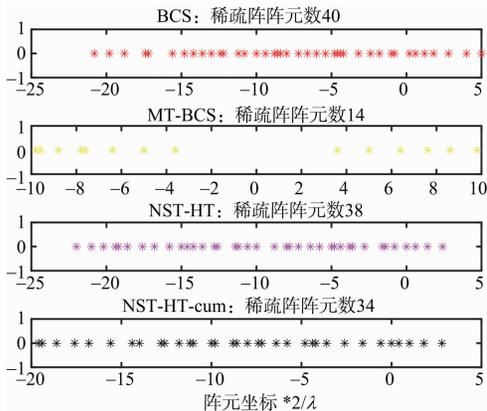


图 9 仿真 2a) 的阵元位置

表 3 仿真 2 a) 的 4 种算法对比

参数	E-bcs	E-mt-bcs	E-NST-HT	E-NST-HT-cum
$P$	40	14	38	34
$t$	0.227 7	0.075 4	1.750 0	5.576 9
误差	0.002 7	0.353 7	6.296 59	6.591 0
增益/dB	0.016 5	7.905 3	5.465 4	5.547 0

对于给定的非对称方向图,仿真证明了算法 NST-HT 与 NST-HT-cum 的有效性。与基于 BCS 的优化算法相比,所提算法优化后的阵元数目更少;与基于 MT-BCS 的优化算法相比,所提算法更加吻合给定的方向图。

b) 双平顶主瓣方向图的稀疏阵综合

参考方向图为给定的双平顶主瓣方向图,主瓣位置为 $[-45, -35] \cup [35, 45]$ ;备选阵元位置间隔均匀排列为 $[-30 * \lambda/2; \lambda/10; 30 * \lambda/2]$ ,方向图角度 $\theta \in [-90, 90]$ ,仿真结果如图 10、图 11 所示,与参考算法的性能比较如表 4 所示。

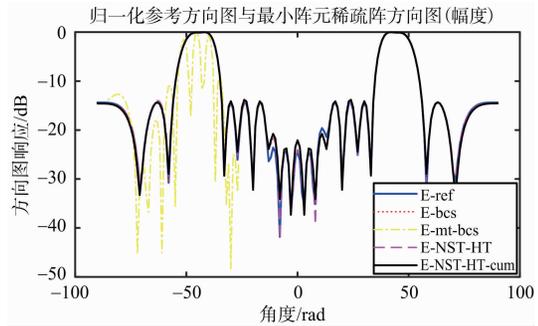


图 10 仿真 2 b) 的方向图

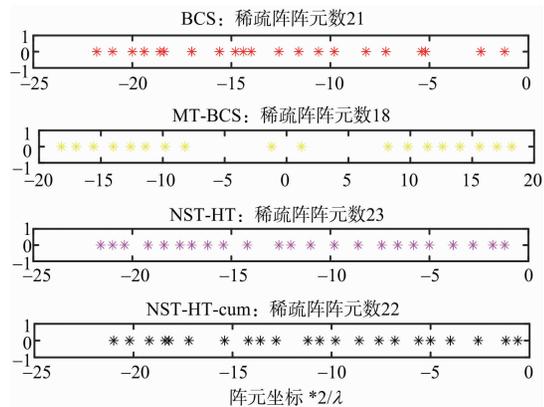


图 11 仿真 2 b) 的阵元位置

表 4 仿真 2 b) 的 4 种算法对比

参数	E-bcs	E-mt-bcs	E-NST-HT	E-NST-HT-cum
$P$	21	18	23	22
$t$	0.129 5	0.062 5	0.359 6	0.769 7
误差	0.017 8	44.865 5	21.551 5	27.385 8
增益/dB	0.022 9	9.984 2	7.554 4	7.991 5

对于给定的双平顶主瓣方向图,算法 NST-HT 与 NST-HT-cum 同样有效。与基于 BCS 的优化算法相比,所提算法的方向图增益更高;与基于 MT-BCS 的优化算法相比,所提算法更加吻合给定的方向图;算法 NST-HT 与算法 NST-HT-cum 的结果相类似。

仿真 3  $8 * 8$  面阵的切比雪夫方向图稀疏阵综合

参考方向图为  $8 * 8$  的面阵,加权方式为切比雪夫权值; $y_0z$  平面备选阵元位置呈栅格分布  $y \in$

$[-10 * \lambda/2; \lambda/10; 10 * \lambda/2], z \in [-10 * \lambda/2; \lambda/10; 10 * \lambda/2]$ ,方位与俯仰角: $\theta \in [-45, 45], \varphi \in [-45, 45]$ (单位: rad),仿真结果如图 12~图 15 所示,与参考算法的性能比较如表 5 所示。

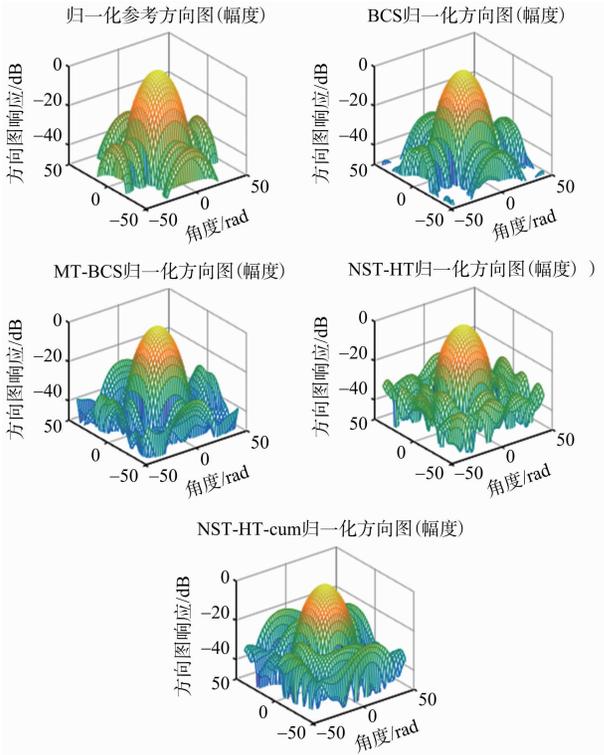


图 12 仿真 3 的方向图

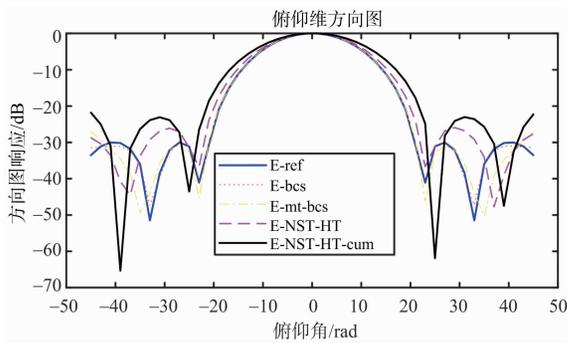


图 13 仿真 3 俯仰维方向图

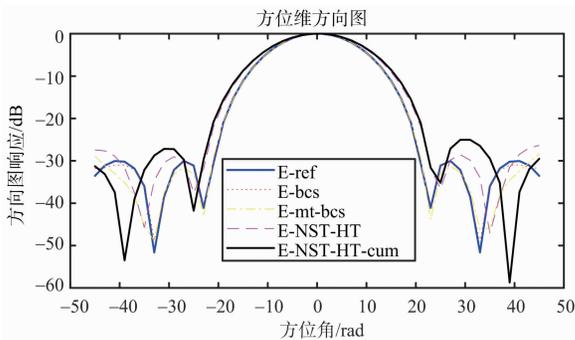


图 14 仿真 3 方位维方向图

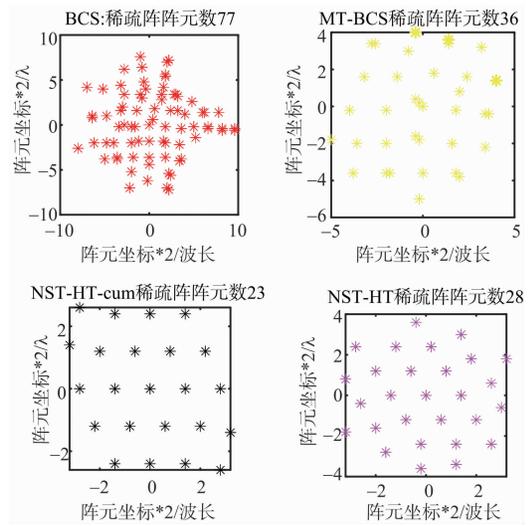


图 15 仿真 3 阵元位置图

表 5 仿真 3 的 4 种算法对比

参数	E-ref	E-bcs	E-mt-bcs	E-NST-HT	E-NST-HT-cum
$P$	64	77	36	28	23
$P/P-ref$	1	1.203 1	0.562 5	0.437 5	0.359 4
$t$		13.038 9	3.931 4	274.670 1	40.899 2
误差		0.009 3	0.464 0	0.198 7	0.280 8
增益/dB	14.253 4	14.256 2	9.314 5	11.447 3	10.535 8

针对给定的  $8 \times 8$  平面阵的方向图,所提算法优化结果可在降低阵元数目的情况下,实现低旁瓣方向图综合。基于 BCS 的算法在处理面阵问题时效果较差。基于 MT-BCS 的算法可以实现阵元数目的降低,但与所提算法相比误差较大、阵元数目较多且增益低。在备选阵元位置多的情况下,算法 NST-HT-cum 比算法 NST-HT 所用时间有明显减少,且优化后阵元数目更少。观察优化得到的 4 张阵元位置图,不难发现阵元位置似乎是呈现圆形或六边形分布。正如我们所知,圆形或六边形分布阵元的方向图主副比更低。

## 4 结束语

基于 NST-HT 的最小阵元方向图综合算法适用于线阵或面阵阵元位置和阵元加权优化问题,可实现符合误差要求的任意给定方向图综合。相比基于 BCS 和 MT-BCS 方向图综合算法,所提算法在备选阵元位置较多时,所综合得到的阵元位置更少,误差更小。仿真实验证明了算法的有效性。

## 参考文献:

- [1] GU Pengfei, WANG Gui, FAN Zhenhong, et al. An Efficient Approach for the Synthesis of Large Sparse Planar Array [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2019, 67(12): 7320-7330.
- [2] PINCHERA D, MIGLIORE M, LUCIDO M, et al. Efficient Large Sparse Arrays Synthesis by Means of Smooth Re-Weighted L1 Minimization[J]. Electronics, 2019, 8(1): 83.
- [3] LI Hailin, JIANG Yachao, DING Yuan, et al. Low-Sidelobe Pattern Synthesis for Sparse Conformal Arrays Based on PSO-SOCP Optimization[J]. IEEE Access, 2018, 6: 77429-77439.
- [4] FAMORIJ O J, XU Zhiwei. Antenna Feed Array Synthesis for Efficient Communication Systems [J]. Sensors Journal IEEE, 2020, 20(24): 15085-15098.
- [5] GU Pengfei, WANG Gui, FAN Zhenhong, et al. Efficient Unitary Matrix Pencil Method for Synthesising Wideband Frequency Patterns of Sparse Linear Arrays [J]. IET Microwaves, Antennas & Propagation, 2018, 12(12): 1871-1876.
- [6] 祁峥东. 基于凸优化理论的阵列天线方向图综合研究 [D]. 南京: 南京大学, 2020.
- [7] 张俊文. 稀疏阵列天线技术研究 [D]. 西安: 西安电子科技大学, 2020.
- [8] ZHANG Wenji, LI Lian, LI Fang. Reducing the Number of Elements in Linear and Planar Antenna Arrays with Sparseness Constrained Optimization [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2011, 59(8): 3106-3111.
- [9] JI Shihao, XUE Ya, CARIN L. Bayesian Compressive Sensing [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2008, 56(6): 2346-2356.
- [10] CANDES E J, WAKIN M B. An Introduction To Compressive Sampling [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21-30.
- [11] OLIVERI G, CARLIN M, MASSA A. Complex-Weight Sparse Linear Array Synthesis by Bayesian Compressive Sampling [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2012, 60(5): 2309-2326.
- [12] JI S, DUNSON D, CARIN L. Multitask Compressive Sensing [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2009, 57(1): 92-106.
- [13] VIANI F, OLIVERI G, MASSA A. Compressive Sensing Pattern Matching Techniques for Synthesizing Planar Sparse Arrays [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2013, 61(9): 4577-4587.
- [14] OLIVERI G, BEKELE E T, ROBOL F, et al. Sparsening Conformal Arrays Through a Versatile BCS-Based Method [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2014, 62(4): 1681-1689.
- [15] CARLIN M, OLIVERI G, MASSA A. Hybrid BCS-Deterministic Approach for Sparse Concentric Ring Isophoric Arrays [J]. IEEE Trans on Antennas and Propagation, 2015, 63(1): 378-383.
- [16] LI Shidong, LIU Yulong, MI Tiebin. Fast Thresholding Algorithms with Feedbacks for Sparse Signal Recovery [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2014, 37(1): 69-88.

## 作者简介:



**陶海红** 女, 1976年4月生, 安徽亳州人, 博士, 教授、博士生导师, 1997年毕业于西安电子科技大学电子工程系, 获学士学位, 2002和2004年分别获西安电子科技大学信号与信息处理硕士、博士学位, 2005年8月至2005年10月在德国汉堡理工大学作访问学习, 2008年破格提升为教授, 现为华山领军教授, 主要研究方向为雷达信号波形设计、MIMO雷达技术、自适应和阵列信号处理、运动目标检测和高速实时信号处理设备, 在核心期刊及国际会议上发表论文70余篇, 其中被SCI、EI、ISTP检索40余篇, 获国防技术发明二等奖、省部级科学技术进步二等奖、校级一等奖各一次, 授权专利19项。



**郭晶晶** 女, 1995年5月生, 山西吕梁人, 西安电子科技大学雷达信号处理国家重点实验室在读博士研究生, 主要研究方向为阵列信号处理、阵列节点遴选和雷达资源管理。