DOI:10.3969/j.issn.1672-2337.2024.02.012

基于三维原子范数的机载MIMO雷达STAP算法

来 燃[1]，李 港[1]，董子正[2]，王 穗[1]，章 涛[1]

（1. 中国民航大学天津市智能信号与图像处理重点实验室，天津 300300；
2. 北京飞机维修工程有限公司天津分公司，天津 300300）

摘 要：针对机载多输入多输出(MIMO)雷达空时自适应处理(STAP)使用稀疏恢复技术时存在的格点失配问题,提出了一种基于三维原子范数的机载MIMO雷达STAP算法。该方法利用杂波空时谱在角度-多普勒域上固有的稀疏性,根据低秩矩阵恢复理论构造了基于三维连续原子集的MIMO雷达杂波信号稀疏恢复模型,避免了稀疏恢复中的格点失配问题,实现了杂波空时谱的高分辨率估计,有效提高了机载MIMO雷达STAP杂波抑制性能。仿真实验表明,本文方法在存在格点失配情况下的MIMO雷达STAP处理性能优于已有的基于字典网格的稀疏恢复方法和二维原子范数方法。

关键词：机载MIMO雷达；空时自适应处理；稀疏恢复；格点失配；原子范数

中图分类号：TN957 **文献标志码：**A **文章编号：**1672-2337(2024)02-0218-08

引用格式：来燃,李港,董子正,等.基于三维原子范数的机载MIMO雷达STAP算法[J].雷达科学与技术,2024,22(2):218-225.
LAI Ran, LI Gang, DONG Zizheng, et al. STAP Algorithm for Airborne MIMO Radar Based on Three-Dimensional Atomic Norm Minimization[J]. Radar Science and Technology, 2024, 22(2):218-225.

STAP Algorithm for Airborne MIMO Radar Based on Three-Dimensional Atomic Norm Minimization

LAI Ran[1], LI Gang[1], DONG Zizheng[2], WANG Sui[1], ZHANG Tao[1]

(1. *Tianjin Key Laboratory for Advanced Signal Processing, Civil Aviation University of China, Tianjin* 300300, *China*;
2. *Tianjin Branch, Beijing Aircraft Maintenance Engineering Co Ltd*, *Tianjin* 300300, *China*)

Abstract: Aiming at the problem of grid mismatch in space-time adaptive processing (STAP) of airborne multiple-input multiple-output (MIMO) radar using sparse recovery technology, a STAP algorithm for airborne MIMO radar based on three-dimensional atomic norm minimization is proposed. According to the low rank matrix recovery theory, a three-dimensional continuous atomic set based sparse recovery model of MIMO clutter signal is constructed, which utilizes the inherent sparsity of clutter space-time spectrum in the angle-Doppler domain. The proposed method can avoid grid mismatch problem in the sparse recovery, which obtaines the clutter spectrum with high accuracy and effectively improves the clutter suppression performance of airborne MIMO radar STAP. Simulation results demonstrate that compared with existing dictionary-grid-based sparse recovery method and two-dimensional atomic norm minimization method, the proposed method provides better STAP processing performance in terms of SINR loss under the grid mismatch condition.

Key words: airborne MIMO radar; space time adaptive processing; sparse recovery; grid mismatch; atomic norm

0 引 言

机载多输入多输出(Multiple-Input Multiple-Output,MIMO)雷达采用波形分集技术,通过在空域维虚拟出更多信号处理通道,获得较单输入多输出(Single-Input Multiple-Output,SIMO)雷达更多系统自由度(Degree of Freedom,DOF),在运动目标检测和参数估计方面受到广泛关注[1]。空时自适应处理(Space Time Adaptive Processing,STAP)技术通过空域和时域自由度的联合处理可以有效滤除地杂波,该技术依赖于准确估计待检测距离单元杂波协方差矩阵(Clutter Covariance Matrix,CCM)[2]。根据RMB(Reed-Mallett-Brennan)准则,要使估计CCM的信干噪比损失小于3 dB,至少需要系统自

收稿日期：2023-10-19；修回日期：2023-11-21
基金项目：天津市教委科研计划项目(No.2021KJ048)

由度 2 倍的独立同分布(Independent Identically Distributed,IID)样本数。在实际场景中,受限于非均匀杂波环境和天线阵列配置方式的影响,用于估计 CCM 的 IID 训练样本数很难满足条件[3-4]。在 MIMO 雷达中,系统自由度的增加也使得所需 IID 训练样本数急剧增大。因此,如何利用少量 IID 训练样本精确估计 CCM 是机载 MIMO 雷达 STAP 技术面临的关键问题。

近年来,稀疏恢复技术在机载 SIMO 雷达 STAP 中得到快速发展[5-8],该技术也逐渐从 SIMO 雷达拓展到 MIMO 雷达中[9-11]。稀疏恢复 STAP(SR-STAP)技术利用杂波谱在角度-多普勒域上固有的稀疏性,可在单样本或少量样本情况下提高 CCM 的估计精度。字典网格的划分对稀疏恢复技术尤为关键,然而当前稀疏恢复技术构造的离散字典还存在格点失配问题,若直接将该技术应用到机载 MIMO 雷达 STAP 中,稀疏恢复性能将会下降。针对格点失配问题,众多学者提出许多离网(Off-Grid)稀疏恢复方法。文献[12]提出了基于参数搜索正交匹配追踪(Parameter-Searched Orthogonal Matching Pursuit,PSOMP)的稀疏恢复方法,补偿了稀疏恢复中的格点失配误差。文献[13]提出了基于杂波脊先验知识的稀疏恢复方法,实现了字典网格间距的自适应调整。文献[14]通过建立格点失配误差校正模型,提出了基于离网稀疏贝叶斯推理(Off-Grid Sparse Bayesian Inference,OGSBI)的稀疏恢复方法。然而,上述针对格点失配问题提出的稀疏恢复方法都是基于离散字典实现的,不能从根本上避免格点失配问题的产生。

为彻底解决格点失配问题,Candes 等[15]提出了全变分范数,实现了在连续参数空间上恢复稀疏信号。文献[16]在此基础上将 l_0 范数凸松弛为 l_1 范数,提出了原子范数最小化(Atomic Norm Minimization,ANM)的半正定规划(Semi-Definite Programming,SDP)求解方法,同时将恢复信号的空间分辨率提高到 4/DOF。文献[17]对原子范数最小化的半正定规划求解模型进行了推广,解决了高维信号($d \geqslant 2$)的稀疏恢复问题。文献[18]将原子范数理论应用到机载雷达 STAP 处理中,提出了基于二维 ANM 的机载雷达 SR-STAP 方法,然而该方法只能在空-时二维参数空间上估计杂波子空间,若应用到机载 MIMO 雷达 STAP 中,将会出现系统自由度的损失。但如果能直接在发射-接收-时域三维参数空间上对 MIMO 雷达杂波信号进行 ANM 稀疏恢复,就可以充分利用 MIMO 雷达的系统自由度,获得较二维 ANM 方法更优的估计性能。因此,本文在文献[18]的基础上,推导了适用于机载 MIMO 雷达的 ANM 求解模型,提出了基于三维原子范数的机载 MIMO 雷达 STAP 算法,解决了机载 MIMO 雷达 SR-STAP 中的格点失配问题,实现了杂波空时谱的高分辨率估计,有效提高了机载 MIMO 雷达 STAP 杂波抑制性能。仿真结果表明,本文方法在存在格点失配情况下的 STAP 处理性能优于已有的基于字典网格的稀疏恢复方法和二维 ANM 方法。

1　MIMO 雷达信号模型

图 1 为机载 MIMO 雷达均匀线阵几何模型,其中发射阵元数为 M,阵元间距为 d_t,接收阵元数为 N,阵元间距为 d_r,载机平台沿 x 轴放置,飞行速度为 v,速度方向与阵列轴线的夹角(即偏航角)为 ϕ,当 $\phi = 0^\circ$ 时为正侧视阵,当 $\phi \neq 0^\circ$ 时为非正侧视阵,H 为载机高度,θ、φ 为对应杂波块的方位角和俯仰角。雷达工作波长为 λ,在恒定脉冲频率 f_r 的相干处理间隔(Coherent Processing Interval,CPI)内发射 K 个脉冲。

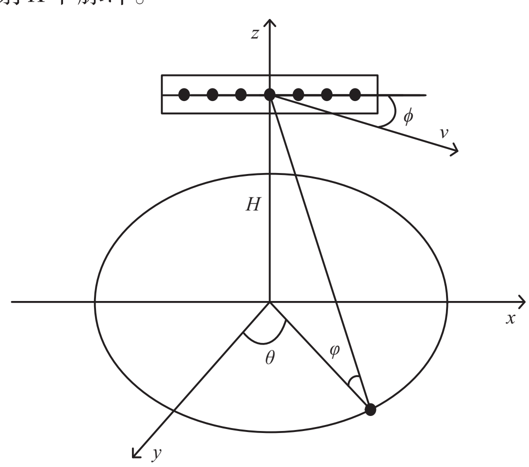


图 1　机载 MIMO 雷达均匀线阵几何模型

机载 MIMO 雷达发射正交信号,在接收端通过匹配滤波将接收信号分离出 M 个发射阵元信号,从而实现虚拟阵列。定义各杂波块的空域发射导向矢量 $\boldsymbol{a}_t(f_s) \in \mathbb{C}^{M\times 1}$、空域接收导向矢量 $\boldsymbol{a}_r(f_s) \in \mathbb{C}^{N\times 1}$ 分别为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi\gamma f_{\mathrm{s}}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(N-1)\gamma f_{\mathrm{s}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}(f_{\mathrm{s}}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_{\mathrm{s}}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(M-1)f_{\mathrm{s}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中，f_{s}为杂波块的归一化空间频率，$\gamma = d_{\mathrm{t}}/d_{\mathrm{r}}$为发射阵元和接收阵元的间距比，$\mathbb{C}$表示复数空间。

时域导向矢量$\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}(f_{\mathrm{d}}) \in \mathbb{C}^{K\times 1}$为

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}(f_{\mathrm{d}}) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_{\mathrm{d}}} & \cdots & \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi(K-1)f_{\mathrm{d}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

式中，f_{d}为杂波块的归一化多普勒频率。

设φ_l为第l个距离单元的俯仰角，θ_p为第p个杂波块的方位角，则第p个杂波块的归一化空间频率$f_{\mathrm{s},p} = d_{\mathrm{r}}\sin(\theta_p)\cos(\varphi_l)/\lambda$，第$p$个杂波块的归一化多普勒频率$f_{\mathrm{d},p} = 2v\sin(\theta_p + \phi)\cos(\varphi_l)/(\lambda f_{\mathrm{r}})$。

当天线阵采取正侧视配置方式，即偏航角$\phi = 0^\circ$时，杂波的$f_{\mathrm{d},p}$和$f_{\mathrm{s},p}$在空时二维平面上满足线性关系，即$f_{\mathrm{d},p} = \beta f_{\mathrm{s},p}$，其中$\beta = 2v/(f_{\mathrm{r}}d_{\mathrm{r}})$为杂波脊斜率。当天线阵采取非正侧视配置方式，即偏航角$\phi \neq 0^\circ$时，杂波的$f_{\mathrm{d},p}$和$f_{\mathrm{s},p}$在空时二维平面上满足椭圆曲线关系。

第l个距离单元的空时快拍数据经匹配滤波后，输出MNK维的信号矢量$\boldsymbol{x}_l \in \mathbb{C}^{MNK\times 1}$，即

$$\boldsymbol{x}_l = \boldsymbol{x}_{\mathrm{c},l} + \boldsymbol{n} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{n}$为噪声信号，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},l}$为杂波信号。$\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},l}$可以表示为$N_{\mathrm{c}}$个杂波块的空时信号的叠加，即

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},l} = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{c}}} \boldsymbol{\sigma}_p \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},p}, f_{\mathrm{d},p}) = \sum_{p=1}^{N_{\mathrm{c}}} \boldsymbol{\sigma}_p \boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}(f_{\mathrm{d},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}(f_{\mathrm{r},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{t},p}) \tag{5}$$

式中，N_{c}为杂波块的个数，$\boldsymbol{\sigma}_p$为第p个杂波块的复幅度，$\boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},p}, f_{\mathrm{d},p})$为第$p$个杂波块的空时导向矢量，$\otimes$表示Kronecker积。

则L个距离单元的空时快拍数据经匹配滤波后的数据$\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^{MNK\times L}$可以表示为

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} + \boldsymbol{N} \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_{\mathrm{c},1}, & \boldsymbol{x}_{\mathrm{c},2}, & \cdots, & \boldsymbol{x}_{\mathrm{c},L} \end{bmatrix}$为杂波分量，$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_1, & \boldsymbol{n}_2, & \cdots, & \boldsymbol{n}_L \end{bmatrix}$为噪声分量。

2 MIMO雷达SR-STAP算法及格点失配问题

2.1 MIMO雷达SR-STAP原理

MIMO雷达SR-STAP方法利用杂波谱在空时二维平面上固有的稀疏性，通常将整个空时平面进行等间隔网格划分，然后将网格点对应的空时导向矢量看作基向量并构造空时导向矢量字典。设网格点大小为$Q = N_{\mathrm{s}} \times N_{\mathrm{d}}$，其中$N_{\mathrm{s}} = \rho_{\mathrm{s}} MN$，$N_{\mathrm{d}} = \rho_{\mathrm{d}} K$，$\rho_{\mathrm{s}} > 1$，$\rho_{\mathrm{d}} > 1$分别表示空域和时域的网格疏密标度，空时导向矢量字典$\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{C}^{MNK\times N_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{d}}}$可以表示为

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},1}, f_{\mathrm{d},1}), \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},1}, f_{\mathrm{d},2}), \cdots, \\ \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},1}, f_{\mathrm{d},N_{\mathrm{d}}}), \cdots, \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},N_{\mathrm{s}}}, f_{\mathrm{d},N_{\mathrm{d}}}) \end{bmatrix} \tag{7}$$

式中，$f_{\mathrm{s},i}(i = 1,2,\cdots,N_{\mathrm{s}})$和$f_{\mathrm{d},j}(j = 1,2,\cdots,N_{\mathrm{d}})$分别表示空域第$i$个网格点对应的空间频率和时域第$j$个网格点对应的多普勒频率。

经匹配滤波后的空时多快拍样本$\boldsymbol{X}$可以由空时导向矢量字典$\boldsymbol{\Psi}$表示为

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{N_{\mathrm{s}}}\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{d}}} \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},i}, f_{\mathrm{d},j})\boldsymbol{s}_{i,j} + \boldsymbol{N} = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{N} \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{S} \in \mathbb{C}^{MNK\times L}$为杂波在角度-多普勒域上的像，其每个非零行表示对应的网格点上存在杂波分量。

多快拍训练样本的MIMO雷达杂波空时谱稀疏恢复模型可以表示为

$$\min_{\boldsymbol{S}} \|\boldsymbol{S}\|_{2,0} \quad \text{subject to} \quad \|\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{X}\|_{\mathrm{F}}^2 \leqslant \varepsilon \tag{9}$$

式中$\|\cdot\|_{2,0}$表示$\ell_{2,0}$混合范数，$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$表示Frobenius范数，ε为允许误差容限。通过求解杂波的角度-多普勒像$\boldsymbol{S}$，可以获得MIMO雷达杂波协方差矩阵为

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}} = \boldsymbol{\Psi}\,\mathrm{diag}\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{N_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{d}}}\}\boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{H}} \tag{10}$$

式中，$\xi_k = \dfrac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\left|s_{l,k}\right|^2$，$k = 1,2,\cdots,N_{\mathrm{s}}N_{\mathrm{d}}$为第$k$个基向量的平均功率。

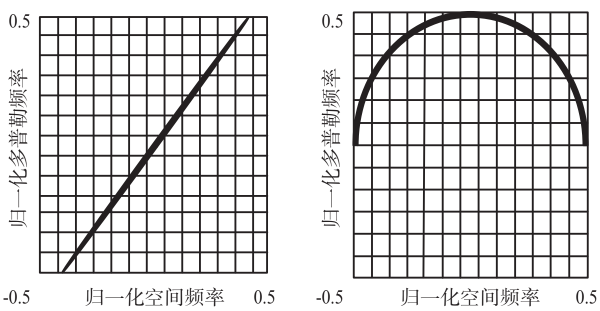
由于$\ell_{2,0}$范数很难优化求解，属于非确定性多项式难题（Non-deterministic Polynomial-hard，NP-hard），可以通过其松弛方法求解。

2.2 格点失配问题

SR-STAP技术假设杂波脊正好落在构造字典的离散网格点上，然而，这一假设通常并不成立。对于正侧视阵，杂波脊线在空时平面上呈斜对角线分布，在构造空时导向矢量字典时，很难保证$N_{\mathrm{s}}/N_{\mathrm{d}}$比值为整数倍的杂波脊斜率，导致杂波脊线

和离散化的网格点不能完全对准,产生格点失配问题。对于非正侧视阵,杂波脊线沿椭圆分布,杂波脊线和离散网格点存在明显偏移,只有少量离散网格点和杂波脊线完全对准,格点失配问题更加严重。格点失配问题一旦产生,估计的杂波谱将会展宽,导致杂波抑制性能下降。虽然缩小网格间隔可以在一定程度上增加杂波脊线对准离散网格点的概率,但是空时导向矢量字典中相邻基向量的相关性会随之增强,不仅导致稀疏恢复性能下降,而且计算复杂度也会增加。

图 2 是 MIMO 雷达在不同阵列配置方式下杂波谱在空时平面上的分布图,图 2(a)和 2(b)分别对应正侧视阵(偏航角 $\phi = 0^\circ$, $\beta = 1.2$)和非正侧视阵(偏航角 $\phi = 90^\circ$)情况,这两种情况均存在格点失配问题。



(a) 正侧视阵(偏航角 $\phi = 0^\circ, \beta = 1.2$) (b) 非正侧视阵(偏航角 $\phi = 90^\circ$)

图 2　MIMO 雷达在不同阵列配置方式下的杂波谱

3　基于三维原子范数的机载 MIMO 雷达 STAP 算法

与离散域上的稀疏恢复技术不同,原子范数理论是直接在连续域中进行稀疏恢复,通过在连续域中使用最少的原子来表征稀疏信号,避免了网格化方法构造离散字典带来的格点失配问题。针对机载 MIMO 雷达 SR-STAP 方法中杂波脊线存在的格点失配问题,本文提出一种基于三维原子范数的机载 MIMO 雷达 STAP 算法。

为构造基于三维连续原子集的 MIMO 雷达杂波信号稀疏恢复模型,令 $f_{\mathrm{r},p} = f_{\mathrm{s},p}$ 为接收阵归一化空间频率,$f_{\mathrm{t},p} = \gamma f_{\mathrm{s},p}$ 为发射阵归一化空间频率,则 MIMO 雷达杂波空时导向矢量可以写成关于三维频率的范德蒙德向量形式,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(f_{\mathrm{s},p}, f_{\mathrm{d},p}) &= \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{t},p}, f_{\mathrm{r},p}, f_{\mathrm{d},p}) = \\ &\boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}(f_{\mathrm{d},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}(f_{\mathrm{r},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{t},p})\end{aligned} \tag{11}$$

假设连续空时平面上的所有杂波空时导向矢量表示的集合为三维原子集 A,即

$$\begin{aligned}A \triangleq &\left\{ \boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}) \left| \begin{array}{l} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{f}) \in \mathbb{C}^{MNK \times 1}, \\ \boldsymbol{f} \in [-0.5, 0.5) \times [-0.5, 0.5) \times [-0.5, 0.5) \end{array} \right. \right\} = \\ &\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{a}_{\mathrm{d}}(f_{\mathrm{d},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}(f_{\mathrm{r},p}) \otimes \boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{t},p}), \\ f_{\mathrm{t}} \in [-0.5, 0.5), f_{\mathrm{r}} \in [-0.5, 0.5), f_{\mathrm{d}} \in [-0.5, 0.5) \end{array} \right\}\end{aligned} \tag{12}$$

式中,$\boldsymbol{f}$ 为杂波的发射阵、接收阵归一化空间频率和归一化多普勒频率 f_{t}, f_{r} 和 f_{d} 组成的三维频率,即 $\boldsymbol{f} = (f_{\mathrm{t}}, f_{\mathrm{r}}, f_{\mathrm{d}})$。

此时,基于式(12)可以得到杂波信号 $\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}$ 的 ℓ_0 范数,表示形式为

$$\left\| \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_{A,0} \triangleq \inf_{\substack{f_{\mathrm{t}} \in [-0.5, 0.5), f_{\mathrm{r}} \in [-0.5, 0.5), f_{\mathrm{d}} \in [-0.5, 0.5) \\ \boldsymbol{s}_k \in \mathbb{C}^{1 \times L} \\ \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{t}}, f_{\mathrm{r}}, f_{\mathrm{d}}) \in A}} \left\{ N_{\mathrm{r}} : \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} = \sum_{k=1}^{N_{\mathrm{r}}} \boldsymbol{a}(f_{\mathrm{t}}, f_{\mathrm{r}}, f_{\mathrm{d}}) \boldsymbol{s}_k \right\} \tag{13}$$

式中,N_{r} 为原子的个数,即杂波秩。$\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}$ 可以通过求解下式的原子 ℓ_0 范数最小化获得,即

$$\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} = \min \left\| \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_{A,0} \ \text{subject to} \left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_2^2 \leqslant \varepsilon_{\mathrm{n}}^2 \tag{14}$$

式中,$\varepsilon_{\mathrm{n}}^2$ 为噪声水平。由 $\left\| \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_{A,0} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{R}_{\mathrm{c}}) = N_{\mathrm{r}}$ 可知,$\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}$ 和杂波子空间 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$ 可以通过求解秩最小化优化问题估计得到,即

$$\begin{aligned}&\left\{ \hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}) \right\} = \underset{\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})}{\arg\min} \operatorname{rank}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})), \\ &\qquad \text{subject to} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}, \left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_2^2 \leqslant \varepsilon_{\mathrm{n}}^2\end{aligned} \tag{15}$$

式中,$\operatorname{rank}(\cdot)$ 表示矩阵的秩。由于秩最小化优化问题是 NP-hard 难题,通过对秩约束进行凸松弛,式(15)可以转化为原子范数最小化问题,即

$$\begin{aligned}&\left\{ \hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{c}}, \hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B}) \right\} = \underset{\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})}{\arg\min} \operatorname{tr}[\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})] + \operatorname{tr}[\boldsymbol{W}], \\ &\qquad \text{subject to} \begin{bmatrix} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{B}) & \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \\ \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}} & \boldsymbol{W} \end{bmatrix} \geqslant \boldsymbol{0}, \left\| \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}_{\mathrm{c}} \right\|_2^2 \leqslant \varepsilon_{\mathrm{n}}^2\end{aligned} \tag{16}$$

式中,$\operatorname{tr}[\cdot]$ 为迹运算,$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})$ 为 $MNK \times MNK$ 的三重块 Topelitz 矩阵,即

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{B})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{T}) & \boldsymbol{S}_{-1}(\boldsymbol{T}) & \cdots & \boldsymbol{S}_{-(K-1)}(\boldsymbol{T}) \\ \boldsymbol{S}_1(\boldsymbol{T}) & \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{T}) & \cdots & \boldsymbol{S}_{-(K-2)}(\boldsymbol{T}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{S}_{K-1}(\boldsymbol{T}) & \boldsymbol{S}_{K-2}(\boldsymbol{T}) & \cdots & \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{T}) \end{bmatrix} \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{T})(1-K\leqslant i\leqslant K-1)$为$MN\times MN$的块Topelitz矩阵，即

$$\boldsymbol{S}_i(\boldsymbol{T})=\begin{bmatrix} \boldsymbol{T}_{i,0} & \boldsymbol{T}_{i,-1} & \cdots & \boldsymbol{T}_{i,-(M-1)} \\ \boldsymbol{T}_{i,1} & \boldsymbol{T}_{i,0} & \cdots & \boldsymbol{T}_{i,-(M-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{T}_{i,M-1} & \boldsymbol{T}_{i,M-2} & \cdots & \boldsymbol{T}_{i,0} \end{bmatrix} \tag{18}$$

式中，$\boldsymbol{T}_{i,j}(1-M\leqslant j\leqslant M-1)$为$N\times N$的Topelitz矩阵，即

$$\boldsymbol{T}_{i,j}=\begin{bmatrix} u_{i,j,0} & u_{i,j,-1} & \cdots & u_{i,j,-(N-1)} \\ u_{i,j,1} & u_{i,j,0} & \cdots & u_{i,j,-(N-2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{i,j,N-1} & u_{i,j,M-2} & \cdots & u_{i,j,0} \end{bmatrix} \tag{19}$$

通常求解式(16)的对偶问题来获取原始问题的解，即

$$\begin{aligned} &\min_{h,Q}\ 2\varepsilon_{\mathrm{n}}\|\boldsymbol{V}\|_{\mathrm{F}}+2\mathrm{Re}\left[\mathrm{tr}(\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{V})\right], \\ &\text{subject to}\ \ \delta_{\boldsymbol{k}}=\mathrm{tr}[\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{Q}],\boldsymbol{k}\in H_3, \\ &\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{V}^{\mathrm{H}} \\ \boldsymbol{V} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}\geqslant\boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{20}$$

式中，Re[·]为取实部运算，$\boldsymbol{V}\in\mathbb{C}^{MNK\times L}$为$\boldsymbol{X}_{\mathrm{c}}$的对偶变量，$\boldsymbol{\Theta}_{\boldsymbol{k}}=\boldsymbol{\Theta}_{k_1}\otimes\boldsymbol{\Theta}_{k_2}\otimes\boldsymbol{\Theta}_{k_3}$，$\boldsymbol{\Theta}_{k_1}$，$\boldsymbol{\Theta}_{k_2}$，$\boldsymbol{\Theta}_{k_3}$分别为格拉姆矩阵，$\boldsymbol{Q}\in\mathbb{C}^{MNK\times MNK}$为具有低秩及三重Topelitz矩阵结构特性的半正定埃尔米特矩阵[18]，H_3表示半空间，$\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3)$，$-M\leqslant k_1\leqslant M$，$-N\leqslant k_2\leqslant N$，$-K\leqslant k_3\leqslant K$，$\delta_{\boldsymbol{k}}$的取值为

$$\delta_{\boldsymbol{k}}=\begin{cases} 1, \boldsymbol{k}=(0,0,0) \\ 0, \text{其他} \end{cases} \tag{21}$$

通过求解式(20)可以获得杂波子空间和杂波分量的估计值$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$，$\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{c}}$，对$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$进行特征值分解，进而得到杂波协方差矩阵的估计值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{c}}$，即

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{c}}=\frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{U}\,\mathrm{diag}\left(\left|\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}_{\mathrm{c},l}\right|^2\right)\boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \tag{22}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{U}\sum\boldsymbol{U}^{-1}$表示特征值分解。

则待检测距离单元的CCM估计值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}$和MIMO雷达空时滤波器的自适应权向量$\boldsymbol{\omega}$可以分别表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}=\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{c}}+\sigma^2\boldsymbol{I}_{MNK} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})}{\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})} \tag{24}$$

其中，$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{t}},f_{\mathrm{r}},f_{\mathrm{d}})$为待检测距离单元的空时导向矢量，$\boldsymbol{I}_{MNK}$为$MNK\times MNK$的单位向量，$\sigma^2$为噪声功率。

本文算法的具体操作步骤如下：

步骤1：根据式(16)对多快拍训练样本数据$\boldsymbol{X}$进行稀疏恢复，获得杂波子空间的估计值$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$；

步骤2：根据式(22)对杂波子空间估计值$\hat{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{B})$进行特征值分解，得到杂波协方差矩阵的估计值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{c}}$；

步骤3：由式(23)估计待检测距离单元的杂波加噪声协方差矩阵的估计值$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}$；

步骤4：由式(24)计算MIMO雷达空时滤波器的自适应权向量$\boldsymbol{\omega}$。

4 仿真实验分析

本节利用仿真实验评估所提出的基于三维原子范数的机载MIMO雷达STAP算法的性能，使用3个空时快拍作为训练样本，分别仿真格点失配问题产生时，本文方法、文献[14]中的OGSBI方法及文献[18]中的二维ANM方法等3种离网方法和文献[5]中的FOCUSS方法及文献[6]中的SBL方法等2种方法的杂波谱和信干噪比损失，信干噪比损失中各曲线均是进行100次蒙特卡罗仿真实验所得。机载MIMO雷达系统参数设置如表1所示。

表1 机载MIMO雷达系统参数

参数	参数值
机载平台高度H	9 000 m
载机速度v	150 m/s
发射阵元数M	4
接收阵元数N	4
相干脉冲数K	16
脉冲重复频率f_{r}	1 500 Hz
工作波长λ	0.4 m
发射阵元间距d_{t}	0.2 m
接收阵元间距d_{r}	0.2 m
杂波块数N_{c}	361
杂噪比CNR	40 dB

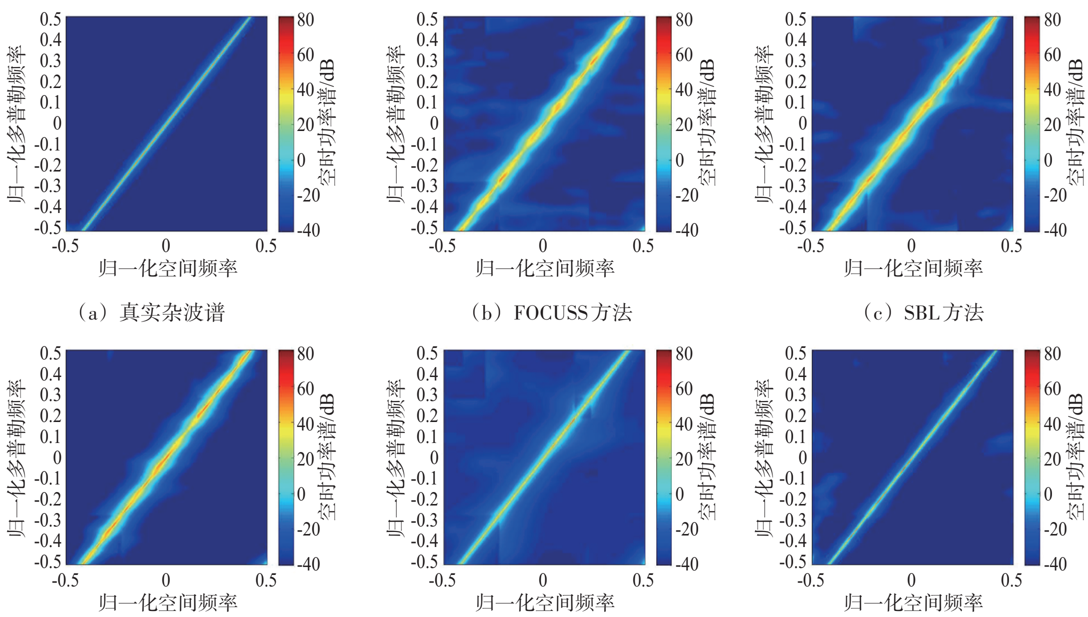
此外，仿真实验中各算法参数设置：OGSBI 方法的网格分辨率设置为 0.02，迭代终止条件为 $tol = 10^{-4}$，最大迭代次数为 2 000，FOCUSS 方法和 SBL 方法的网格离散化系数 $\rho_s = \rho_d = 4$，FOCUSS 方法的正则化参数为 $\lambda = 10^{-2}$，采用 $l_{0.8}$ 范数，SBL 方法的正则化参数初始值为 $\lambda_0 = 10^{-2}$，超参数修剪阈值为 $\gamma = 10^{-4}$，FOCUSS 方法和 SBL 方法的最大迭代次数分别为 800 和 2 000。

4.1　杂波谱估计对比

为了分析格点失配情况下 5 种方法的杂波谱估计性能，MIMO 雷达阵列分别配置为正侧视阵（偏航角 $\phi = 0°$，$\beta = 1.2$）和非正侧视阵（偏航角 $\phi = 90°$）两种方式，采用 Capon 谱（最小方差谱）对杂波谱进行描述，Capon 谱是用于分析杂波谱的高分辨谱，Capon 谱定义为

$$P_{\mathrm{Capon}}(f_s, f_d) = \frac{1}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}(f_s, f_d)\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{a}(f_s, f_d)} \tag{25}$$

图 3 为正侧视阵存在格点失配（偏航角 $\phi = 0°$，$\beta = 1.2$）情况下的杂波 Capon 谱估计结果。从图中可以看出，FOCUSS 方法和 SBL 方法估计的杂波谱均有明显展宽，且分辨率不高，这是因为这两种方法都是基于固定离散字典实现的，在构造字典时由于无法准确获取杂波脊斜率，杂波脊线和离散化的网格点不能完全对准，导致格点失配问题产生，其估计结果只能落在划分好的离散网格点上，字典网格的疏密影响估计性能。OGSBI 方法动态解决了格点失配误差，其估计结果好于 FOCUSS 方法和 SBL 方法，然而模型近似引入的误差限制了其估计性能的提升。二维 ANM 方法虽然避免了网格化方法因构造离散字典而带来的格点失配问题，但系统自由度的损失限制了其估计精度的提高。而本文方法充分利用了系统自由度，其估计的杂波谱集中分布在真实杂波脊线附近，且十分接近真实杂波谱，验证了本文方法在正侧视阵存在格点失配情况下的杂波谱估计性能优于基于字典网格的稀疏恢复方法和二维 ANM 方法。



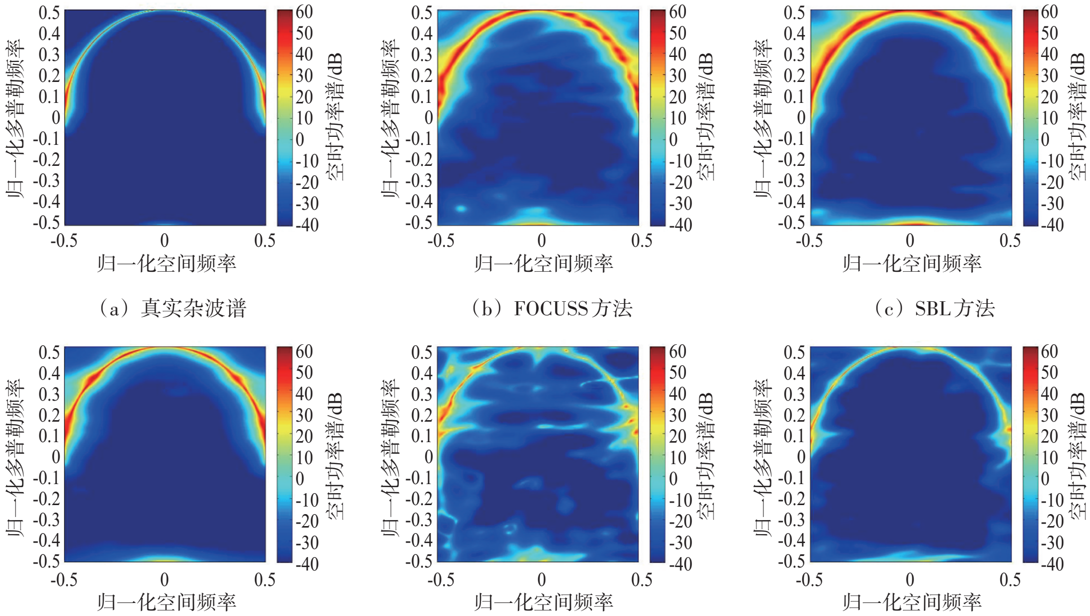
（a）真实杂波谱　（b）FOCUSS 方法　（c）SBL 方法

（d）OGSBI 方法　（e）ANM-2D 方法　（f）本文方法

图 3　正侧视阵存在格点失配（偏航角 $\phi = 0°$，$\beta = 1.2$）情况下的杂波 Capon 谱估计

图 4 为非正侧视阵（偏航角 $\phi = 90°$）情况下的杂波 Capon 谱估计仿真图。从图中可以看出，在非正侧视阵情况下，FOCUSS 方法、SBL 方法、OGSBI 方法估计的杂波谱均较正侧视阵存在格点失配情况更为模糊，展宽十分严重，这是由于在非正侧视阵情况下的杂波脊线沿椭圆分布，杂波脊线和离散化的网格点存在明显偏移，只有少量离散网格点和杂波脊线完全对准，格点失配问题更加严重，二维 ANM 方法虽然不受格点失配问题的影响，但系统自由度的损失限制了其估计性能的提升，而

本文方法依然能够获得较为清晰的杂波谱，且无明显展宽，验证了本文方法在非正侧视阵情况下的杂波谱估计性能优于基于字典网格的稀疏恢复方法和二维ANM方法。



（a）真实杂波谱 （b）FOCUSS方法 （c）SBL方法

（d）OGSBI方法 （e）ANM-2D方法 （f）本文方法

图4 非正侧视阵（偏航角 ϕ = 90°）情况下的杂波Capon谱估计

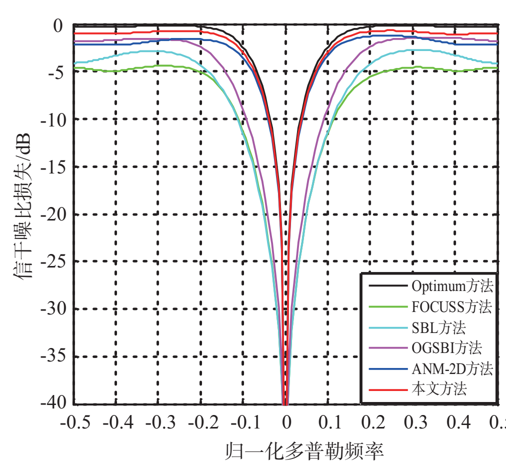
4.2 信干噪比损失对比

本实验采用信干噪比损失（Signal-to-Interference-plus-Noise Ratio Loss，L_{SINR}）评价指标作为5种方法的杂波抑制性能衡量标准，SINR损失 L_{SINR} 定义为空时滤波器输出SINR与仅有白噪声的输出SINR的比值，即

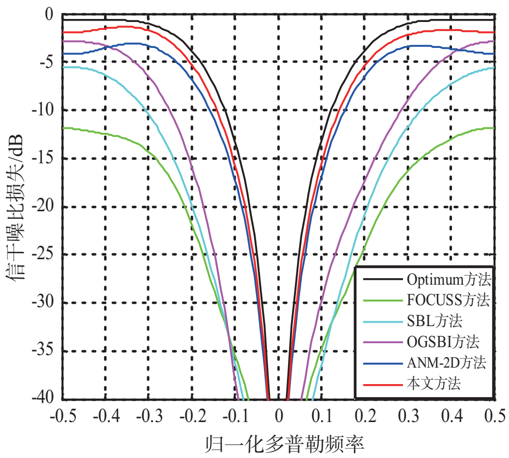
$$L_{\mathrm{SINR}}=\frac{\sigma^2\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})}{\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{H}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})} \tag{26}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{t}}(f_{\mathrm{s}},f_{\mathrm{d}})$ 为目标信号导向矢量，$\hat{\boldsymbol{R}}_{\mathrm{I}}$ 为各方法获取的CCM估计值。

图5为格点失配情况下的信干噪比损失曲线。其中，图5（a）是正侧视阵存在格点失配情况（偏航角 ϕ = 0°，β = 1.2）下的信干噪比损失曲线，图5（b）是非正侧视阵情况（偏航角 ϕ = 90°）下的信干噪比损失曲线。从图5（a）可以看出，对于正侧视阵，FOCUSS方法、SBL方法和OGSBI方法由于构造的离散字典中未能有足够多的网格点与杂波脊线对准，存在格点失配问题，其主杂波区的凹口会有展宽，而本文方法和二维ANM方法在主杂波区无明显展宽，但本文方法得到的SINR损失曲线最接近最优滤波器的SINR损失曲线。从图5（b）可以看出，对于非正侧视阵，由于存在更为严重的格点失配问题，FOCUSS方法、SBL方法、OGSBI方法估计的杂波子空间和真实杂波子空间出现较大偏差，导致其主杂波区的凹口展宽非常严重，而本文方法和二维ANM方法在该区仍可形成较窄的零陷，但在其他区域的SINR损失曲线较二维ANM方法更接近最优滤波器的SINR损失曲线，具有较好的杂波抑制性能和慢速运动目标检测能力。



（a）正侧视阵（偏航角 ϕ = 0°，β = 1.2）



(b) 非正侧视阵(偏航角$\phi = 90°$)

图5　格点失配情况下的信干噪比损失曲线

5　结束语

本文提出了一种基于三维原子范数的机载MIMO雷达空时自适应处理算法。该方法利用杂波谱在空时二维平面上固有的稀疏性,根据低秩矩阵恢复理论构造了基于三维连续原子集的MIMO雷达杂波信号稀疏恢复模型,实现了ANM的半正定规划求解方法,获得了高分辨率估计的杂波空时谱。仿真实验结果表明,在格点失配情况下本文方法获得杂波空时谱的分辨率和SINR损失性能优于对比的4种方法,体现了本文方法的优越性。

参考文献:

[1] 何子述,程子扬,李军,等.集中式MIMO雷达研究综述[J].雷达学报,2022,11(5):805-829.

[2] XIONG Yuanyi, XIE Wenchong, WANG Yongliang. Space Time Adaptive Processing for Airborne MIMO Radar Based on Space Time Sampling Matrix[J]. Signal Processing, 2023, 211:109119.

[3] 史靖希.机载非均匀阵列雷达空时自适应处理算法研究[D].成都:电子科技大学,2023.

[4] SUN Guohao, LI Ming, TONG Jun, et al. Structured Clutter Covariance Matrix Estimation for Airborne MIMO Radar with Limited Training Data[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2022, 19:1-5.

[5] 阳召成,黎湘,王宏强.基于空时功率谱稀疏性的空时自适应处理技术研究进展[J].电子学报,2014,42(6):1194-1204.

[6] DUAN Keqing, WANG Zetao, XIE Wenchong, et al. Sparsity - Based STAP Algorithm with Multiple Measurement Vectors via Sparse Bayesian Learning Strategy for Airborne Radar[J]. IET Signal Processing, 2017, 11(5):544-553.

[7] 徐文先,高志奇,徐伟,等.基于迭代自适应的字典校正空时自适应处理算法[J].信号处理,2021,37(11):2216-2226.

[8] 高志奇,王雪香,黄平平,等.一种改进的稀疏恢复直接数据域STAP方法[J].信号处理,2023,39(6):1060-1069.

[9] CUI Ning, XING Kun, DUAN Keqing, et al. Knowledge-Aided Block Sparse Bayesian Learning STAP for Phased-Array MIMO Airborne Radar[J]. IET Radar Sonar & Navigation, 2021, 15(12):1628-1642.

[10] YIN Qiuyue, YI Jinwang, TANG Jun, et al. A Novel Orthogonal Matching Pursuit Algorithm Based on Reduced-Dimension Dictionary for Airborne MIMO Radar[C]// 2021 2nd International Symposium on Computer Engineering and Intelligent Communications, Nanjing, China: IEEE, 2021:202-206.

[11] MCMULLEN B, KIM S J. Performance of Compressed Sensing MIMO Radar Based on Low-Rank Matrix Recovery[C]// 2022 IEEE Military Communications Conference, Rockville, MD, USA:IEEE, 2022:330-335.

[12] BAI Gatai, TAO Ran, ZHAO Juan, et al. Parameter-Searched OMP Method for Eliminating Basis Mismatch in Space-Time Spectrum Estimation[J]. Signal Process, 2017, 138:11-15.

[13] DUAN Keqing, LIU Weijian, DUAN Guangqing, et al. Off-Grid Effects Mitigation Exploiting Knowledge of the Clutter Ridge for Sparse Recovery STAP[J]. IET Radar Sonar & Navigation, 2018, 12(5):557-564.

[14] YANG Zai, XIE Lihua, ZHANG Cishen. Off-Grid Direction of Arrival Estimation Using Sparse Bayesian Inference[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2013, 61(1):38-43.

[15] CANDÈS E J, FERNANDEZ-GRANDA C. Towards a Mathematical Theory of Super-Resolution[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2014, 67(6):906-956.

[16] TANG Gongguo, BHASKAR B N, SHAH P, et al. Compressed Sensing off the Grid[J]. IEEE Trans on Information Theory, 2013, 59(11):7465-7490.
(下转第230页)